

# Docentencursus relativiteitstheorie

---

*Opgaven bijeenkomst 3, ...en er is meer! - 14 oktober 2013*

De opgaven die met een "L" zijn aangegeven, zijn op leerlingenniveau - dit zijn dus opgaven die in de les of in een examen zouden kunnen voorkomen. De opgaven die met een "D" zijn aangegeven, zijn op docentenniveau. Deze opgaven zijn bedoeld om het inzicht en de kennis van de docent te verdiepen.

## **Opgave 1 (L): Afbuiging van het licht**

a) Een waarnemer staat in een lift die met een constante versnelling van  $10 \text{ m/s}^2$  omhoog beweegt. In de lift is een laser gemonteerd die van de linkerwand af op de rechterwand gericht is. De laserstraal is zo gericht dat die de linkerwand horizontaal verlaat. Verwacht je dat de laserstraal hoger, lager, of even hoog op de rechterwand aankomt als die van de linkerwand vertrokken is? Licht je antwoord toe.

b) Beschrijf ditzelfde experiment, maar nu in een zwaartekrachtsveld. Leg uit dat uit het equivalentieprincipe volgt dat de zwaartekracht het licht afbuigt.

c) Als de lift 3 meter breed is, hoever wordt het licht dan naar beneden afgebogen? Met welke van de volgende groottes kun je deze afbuiging vergelijken?

- De grootte van een bacterie
- De grootte van een lichtgolf
- De grootte van een atoomkern

## **Opgave 2 (L): De Schwarzschildstraal**

De ontsnappingssnelheid van een bolvormig hemellichaam is te berekenen met de formule

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

Hierin is  $v$  de ontsnappingssnelheid,  $G=6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$  de zwaartekrachtsconstante van Newton,  $M$  de massa van het hemellichaam, en  $R$  de straal ervan.

a) De massa van de aarde is  $5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$ . De straal van de aarde is  $6,37 \times 10^6 \text{ m}$ . Bereken de ontsnappingssnelheid vanaf het oppervlak van de aarde.

b) We willen de aarde samenpersen tot een bolletje dat zó klein is dat de ontsnappingssnelheid gelijk is aan de lichtsnelheid. Hoe groot moet de straal van dit bolletje zijn?

c) Als hemellichaam A tien keer zo zwaar is als hemellichaam B, hoeveel groter is de Schwarzschildstraal van hemellichaam A dan? Als beide hemellichamen precies tot een zwart gat worden samengeperst, wat is dan de verhouding van de dichtheden van de hemellichamen?

### Opgave 3 (D): Planckeenheden

De zwaartekrachtsconstante van Newton is gelijk aan  $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ . De lichtsnelheid is gelijk aan  $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ . De massa van de aarde is gelijk aan  $M = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$ .

a) Vind een combinatie van  $G$ ,  $c$  en  $M$  die de eenheid  $\text{m}$  heeft. Laat zien dat de getalswaarde van deze combinatie dezelfde orde van grootte heeft als de Schwarzschildstraal die we in opgave 2b hebben gevonden.

De bovenstaande methode wordt "dimensionele analyse" genoemd: het is een goede manier om in te schatten op welke schaal bepaalde effecten in bepaalde theorieën een rol spelen. Hier hebben we bijvoorbeeld gezien wat de schaal is waarop de algemene relativiteitstheorie (waarin  $G$  en  $c$  een rol spelen) van belang wordt voor een object met de massa van de aarde.

We voegen nu nog een derde fundamentele natuurconstante aan  $G$  en  $c$  toe: de constante van Planck,  $\hbar = 1,05 \times 10^{-34} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$ .

b) Vind combinaties van  $G$ ,  $c$  en  $\hbar$  die respectievelijk de eenheden meter, seconde en kilogram hebben. (Hint: zoek eerst combinaties waarin één van de eenheden niet meer voorkomt; stel die vervolgens samen tot een combinatie waarin ook een tweede eenheid niet meer voorkomt, en gebruik een macht of een  $n$ -de-machts wortel om de overblijvende eenheid in de juiste macht te krijgen.) Wat zijn de getalswaarden van deze combinaties?

De bovenstaande combinaties worden de *Planckeenheden* genoemd. Ze geven de lengte-, tijd- en massaschaal aan waarop niet alleen de algemene relativiteitstheorie maar ook de quantummechanica een rol gaan spelen. Op deze schaal hebben we dus eigenlijk een - nog altijd niet naar tevredenheid ontwikkelde - theorie van de quantumzwaartekracht nodig om de natuurkunde te beschrijven.

c) Alle drie de Planckeenheden lijken op het eerste gezicht op onze alledaagse schaal enorm klein. Leg uit dat dit voor de Planckmassa in feite niet het geval is; deze massa moeten we in zekere zin juist zien als een heel *grote* massa vergeleken bij de massa's die we in het dagelijks leven tegenkomen. (Hint: gebruik het begrip *dichtheid* in het antwoord.)