

Docentencursus relativiteitstheorie

Opgaven bijeenkomst 3, ...en er is meer! - 30 oktober 2014

De opgaven die met een "L" zijn aangegeven, zijn op leerlingenniveau - dit zijn dus opgaven die in de les of in een examen zouden kunnen voorkomen. De opgaven die met een "D" zijn aangegeven, zijn op docentenniveau. Deze opgaven zijn bedoeld om het inzicht en de kennis van de docent te verdiepen.

Opgave 1(L): De ladderparadox

Het is het jaar 2538. Een ruimteschip met een lengte van 300 meter reist over een interstellaire tolweg - dat is een stuk ruimte dat is vrijgemaakt van gevaarlijke rotsblokken en ander stof en gruis. Doordat de ruimte hier zo schoon is kan het ruimteschip zonder gevaar op botsingen met 80% van de lichtsnelheid vliegen. Aan het einde van de tolweg is een tolpoortje in de vorm van een buis waar het ruimteschip doorheen moet vliegen om de tol te betalen. De buis is 200 meter lang.

a) Bereken of het ruimteschip, gezien vanuit een waarnemer die naast het tolpoortje staat, in zijn geheel in het tolpoortje past.

b) Leg zonder berekening uit of het ruimteschip, gezien vanuit een waarnemer in het ruimteschip zelf, ook in zijn geheel in het tolpoortje past.

Het tolpoortje heeft twee "deuren" aan de uiteinden van de buis, in de vorm van krachtvelden die aan- en uitgezet kunnen worden. Zodra het ruimteschip vanuit de waarnemer bij het tolpoortje in zijn geheel in de buis is, wordt de achterste deur gesloten en gaat tegelijk de voorste deur open, zodat het ruimteschip verder kan vliegen.

c) Leg uit of het ruimteschip, gezien vanuit de waarnemer bij het tolpoortje, zonder botsingen met de krachtvelden door het tolpoortje heen kan vliegen.

d) Zijn je antwoorden bij (b) en (c) met elkaar in tegenspraak? Leg uit waarom of waarom niet.

Opmerking: opgave (d) verlangt veel inzicht van de leerling en is dus eerder een docentenvraag dan een leerlingenvraag.

Opgave 2 (D): Relativistisch optellen van snelheden

Een trein rijdt ten opzichte van het station met $v=c/3$. Een hardloper rent door de trein in de rijrichting met een snelheid (ten opzichte van de trein) van $u' = c/3$. In het referentiekader van het station gebruiken we coördinaten (t,x) , met t in seconden en x in lichtseconden. In het referentiekader van de trein gebruiken we coördinaten (t',x') , met t' in seconden en x' in lichtseconden. We nemen aan dat zowel de trein als de hardloper door de oorsprong naar rechts bewegen.

a) Geef de coördinaten (t',x') waarop de hardloper zich na 1 seconde (gemeten in het referentiekader in de trein) bevindt.

b) Bereken met behulp van de Lorentztransformaties de coördinaten (t,x) van deze gebeurtenis in het referentiekader van het station.

c) Bereken uit het antwoord van (b) de snelheid u waarmee de hardloper ten opzichte van het station beweegt.

d) Bonus: leid op dezelfde manier de algemene formule voor het relativistisch optellen van snelheden af:

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}$$

Opgave 3 (D): De Ehrenfest-paradox

Een draaiende schijf heeft een straal van $r=100$ meter.

a) Wat is de maximale hoeksnelheid ω_{\max} (in radialen per seconde) waarmee de schijf ten opzichte van een stilstaande waarnemer kan draaien?

b) De schijf draait in werkelijkheid met een hoeksnelheid $\omega = 3\omega_{\max}/5$. Een meedraaiende waarnemer op de rand van de schijf zet in zijn stelsel markeringen op de rand met onderlinge afstanden (langs de rand van de schijf gemeten) van $\Delta x' = 1\text{m}$. Op welke onderlinge afstand Δx (ook weer langs de rand van de schijf gemeten) ziet de stilstaande waarnemer deze markeringen?

c) Hoe groot is de omtrek van de schijf voor de stilstaande waarnemer?

d) Hoe groot is de omtrek van de schijf voor de meebewegende waarnemer?

e) Bonus: de meedraaiende waarnemer meet ook de omtrek $L(s)$ van de cirkels op de schijf met straal $s < r$. Teken een grafiek van $L(s)$ als functie van s voor $0 < s < r$. Teken in dezelfde grafiek de lijn $f(s) = 2\pi s$. Wat is de betekenis van deze lijn? Teken met een stippellijn ook hoe de grafiek voor $L(s)$ zou doorlopen voor $s > r$. Wat gebeurt er bij $s = 5r/3$?