

Docentencursus relativiteitstheorie

Opgaven bijeenkomst 4, slotbijeenkomst - 30 oktober 2013

Opgave 1 (L): Energie en massa

- a) Schat in hoeveel energie in de vorm van elektriciteit een gemiddeld Nederlands huishouden in een jaar gebruikt.
- b) Als we materie volledig in energie zouden kunnen omzetten, hoeveel kilogram aan materie zou er dan ongeveer nodig zijn om alle Nederlandse huishoudens een jaar lang van stroom te voorzien?

Opgave 2 (L): Afbuiging van het licht

- a) Een waarnemer staat in een lift die met een constante versnelling van 10 m/s^2 omhoog beweegt. In de lift is een laser gemonteerd die van de linkerwand af op de rechterwand gericht is. De laserstraal is zo gericht dat die de linkerwand horizontaal verlaat. Verwacht je dat de laserstraal hoger, lager, of even hoog op de rechterwand aankomt als die van de linkerwand vertrokken is? Licht je antwoord toe.
- b) Beschrijf ditzelfde experiment, maar nu in een zwaartekrachtsveld. Leg uit dat uit het equivalentieprincipe volgt dat de zwaartekracht het licht afbuigt.
- c) Als de lift 3 meter breed is, hoever wordt het licht dan naar beneden afgebogen? Met welke van de volgende groottes kun je deze afbuiging vergelijken?
- De grootte van een bacterie
 - De grootte van een lichtgolf
 - De grootte van een atoomkern

Opgave 3 (L): De Schwarzschildstraal

De ontsnappingsnelheid van een planeet of ster is de minimale snelheid waarmee je een voorwerp omhoog zou moeten gooien om het "van de planeet of ster af te gooien". De ontsnappingsnelheid van een bolvormig hemellichaam is te berekenen met de formule

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

Hierin is v de ontsnappingsnelheid die je wilt berekenen, $G=6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$ de zwaartekrachtsconstante van Newton, M de massa van het hemellichaam, en R de straal ervan.

- a) De massa van de aarde is $5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$. De straal van de aarde is $6,37 \times 10^6 \text{ m}$. Bereken de ontsnappingsnelheid vanaf het oppervlak van de aarde.

b) We willen de aarde samenpersen tot een bolletje dat zó klein is dat de ontsnappingsnelheid gelijk is aan de lichtsnelheid. Hoe groot moet de straal van dit bolletje zijn?

De straal die een hemellichaam moet hebben om de ontsnappingsnelheid gelijk te laten zijn aan de lichtsnelheid, heet de *Schwarzschildstraal*. Als het hemellichaam deze straal heeft, kan er geen licht meer aan ontsnappen, en is er een *zwart gat* ontstaan.

c) Als hemellichaam A tien keer zo zwaar is als hemellichaam B, hoeveel groter is de Schwarzschildstraal van hemellichaam A dan? Als beide hemellichamen precies tot een zwart gat worden samengeperst, wat is dan de verhouding van de dichtheden van de hemellichamen?

Opgave 4 (D): Planckeenheden

De zwaarteconstante van Newton is gelijk aan $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$. De lichtsnelheid is gelijk aan $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$. De massa van de aarde is gelijk aan $M = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$.

a) Vind een combinatie van G , c en M die de eenheid m heeft. Laat zien dat de getalswaarde van deze combinatie dezelfde orde van grootte heeft als de Schwarzschildstraal die we in opgave 2b hebben gevonden.

De bovenstaande methode wordt "dimensionele analyse" genoemd: het is een goede manier om in te schatten op welke schaal bepaalde effecten in bepaalde theorieën een rol spelen. Hier hebben we bijvoorbeeld gezien wat de schaal is waarop de algemene relativiteitstheorie (waarin G en c een rol spelen) van belang wordt voor een object met de massa van de aarde.

We voegen nu nog een derde fundamentele natuurconstante aan G en c toe: de constante van Planck, $\hbar = 1,05 \times 10^{-34} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$.

b) Vind combinaties van G , c en \hbar die respectievelijk de eenheden meter, seconde en kilogram hebben. (Hint: zoek eerst combinaties waarin één van de eenheden niet meer voorkomt; stel die vervolgens samen tot een combinatie waarin ook een tweede eenheid niet meer voorkomt, en gebruik een macht of een n -de-machts wortel om de overblijvende eenheid in de juiste macht te krijgen.) Wat zijn de getalswaarden van deze combinaties?

De bovenstaande combinaties worden de *Planckeenheden* genoemd. Ze geven de lengte-, tijd- en massaschaal aan waarop niet alleen de algemene relativiteitstheorie maar ook de quantummechanica een rol gaan spelen. Op deze schaal hebben we dus eigenlijk een - nog altijd niet naar tevredenheid ontwikkelde - theorie van de quantumzwaarteconstante nodig om de natuurkunde te beschrijven.

c) Alle drie de Planckeenheden lijken op het eerste gezicht op onze alledaagse schaal enorm klein. Leg uit dat dit voor de Planckmassa in feite niet het geval is; deze massa moeten we in zekere zin juist zien als een heel *grote* massa vergeleken bij de massa's die we in het dagelijks leven tegenkomen. (Hint: gebruik het begrip *dichtheid* in het antwoord.)