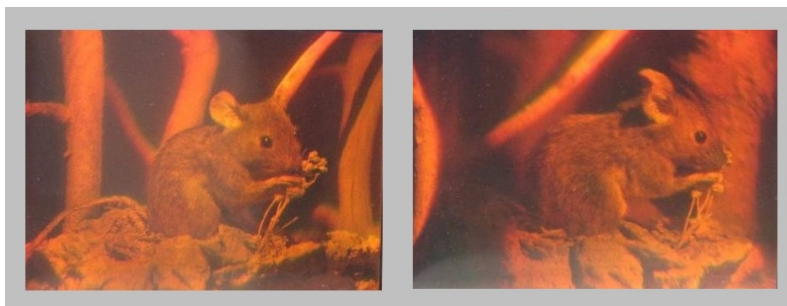


1 Inleiding

Een centraal probleem in de moderne theoretische natuurkunde is het verenigen van quantumtheorie en zwaartekracht. Een mogelijke aanpak is *holografie*, bedacht door onze Nobelprijswinnaar Gerard 't Hooft, Juan Maldacena en anderen. Holografie is het verschijnsel waarbij een ruimte(tijd) in zekere zin equivalent is met de rand van die ruimte. In dit artikel bekijken we een eenvoudig wiskundig voorbeeld van holografie.



Afbeelding 1: een hologram. Een hologram is een tweedimensionale afbeelding die alle informatie over een driedimensionale situatie bevat. In de wis- en natuurkunde is holografie iets soortgelijks: een n -dimensionale ruimte kan meetkundig en natuurkundig equivalent zijn aan een ruimte met minder dimensies. Hologram: Georg-Johann Lay.

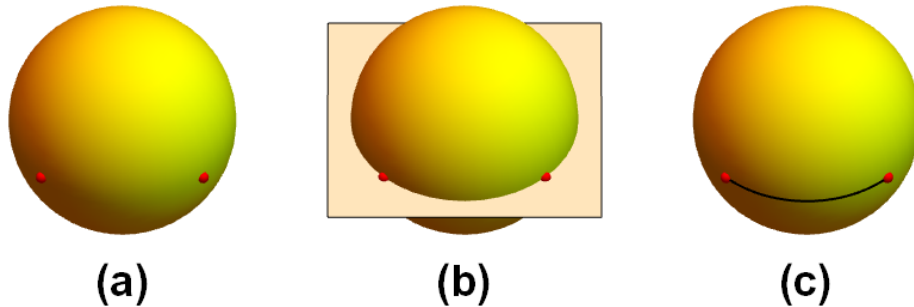
Holografie heeft het wiskundige voordeel dat de rand van een ruimte een lagere dimensie heeft dan de ruimte zelf: de rand van iets n -dimensionaals heeft hoogstens dimensie $n - 1$. In het voorbeeld van Maldacena, de beroemde AdS-CFT-correspondentie, wordt gekeken naar de anti-de-Sitter-ruimtetijd, ontdekt door onze landgenoot Willem de Sitter (1872–1934). Deze $(3+1)$ -dimensionale ruimtetijd heeft een 3-dimensionale rand. De “meetkundes” en zelfs de “natuurkundes” van beide ruimtes zijn equivalent: alle meetkunde (en natuurkunde) van de $(3+1)$ -dimensionale anti-de-Sitter-ruimtetijd kun je vertalen naar zijn 3-dimensionale rand. Voor natuurkundigen is het vooral interessant dat de theorie met zwaartekracht in de anti-de-Sitterruimte equivalent blijkt te zijn met een theorie zonder zwaartekracht op de rand. En daarmee verdwijnt dan het probleem van de quantisatie van de zwaartekracht!

Wie veel meer wil lezen over al deze algemene ideeën kan dat doen in ons dossier over snaren en holografie. In dit artikel gaan we uitgebreid in op een eenvoudig voorbeeld van wiskundige holografie: de equivalentie van de meetkundes van het hyperbolische vlak en van de projectieve lijn. Het mooie is dat dit voorbeeld heel expliciet kan worden uitgewerkt en maar weinig voorkennis vereist. Het is mooi om te zien hoe goede oude wiskundige ideeën relevant blijven in de modernste natuurkunde. Op die natuurkunde zelf gaan we in dit artikel niet veel dieper in.

2 Wiskunde

2.1 Bolmeetkunde

Voordat we naar het hyperbolische vlak gaan, kijken we eerst naar de meetkunde van het boloppervlak, ook wel de 2-sfeer genoemd. De dimensie is 2, omdat je 2 coördinaten nodig hebt – denk aan noorderbreedte en oosterlengte op het aardoppervlak – om een punt op dit oppervlak vast te leggen. De kortste afstand tussen twee punten vind je door de sfeer te snijden met het vlak dat door die twee punten en het middelpunt van de bol gaat – zie afbeelding 2. Die doorsnede is een cirkel. Zo'n cirkel wordt *grote cirkel* genoemd. Voorbeelden zijn de evenaar op aarde en de cirkel die wordt gevormd door de nulmeridiaan (door Greenwich) en door de meridiaan op 180 graden wester- en oosterlengte. De grote cirkel door Amsterdam en Los Angeles gaat langs IJsland. Daarom vlieg je dus zo noordelijk: dat is de kortste weg. Zo'n kortste pad wordt een *geodeet* genoemd.

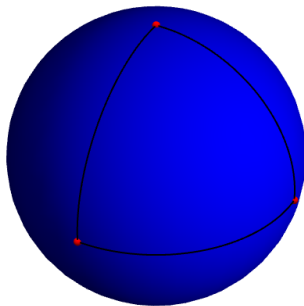


Afbeelding 2: een geodeet. Om de kortste weg tussen twee punten op een bol (a) te vinden, teken je eerst een vlak door die twee punten en het middelpunt van de bol (b). Het vlak snijdt de bol in een grote cirkel; de kortste weg (c) volgt precies deze grote cirkel.

Als je het bolle aardoppervlak afbeeldt op een plat vlak, krijg je altijd vertekening. Afstanden die op de kaart gelijk zijn, zijn dat in werkelijkheid niet, en omgekeerd. Meestal kloppen ook de hoeken en de verhoudingen van oppervlakten niet en in het algemeen worden geodeten op de bol (grote cirkels) niet afgebeeld op geodeten in het vlak (rechte lijnen). Er zijn echter kaarten waarop de verhouding van oppervlakten wel klopt (cilindrische projectie) of waarop de hoeken kloppen (stereografische projectie).

Een driehoek in het gewone platte vlak bestaat uit 3 punten die niet op een lijn liggen en die je verbindt met lijnstukken. Analoog kun je een driehoek op de sfeer definiëren, waarbij de lijnstukken segmenten van geodeten (grote cirkels) zijn. Neem bijvoorbeeld de noordpool en twee punten op de evenaar, namelijk het punt op de nulmeridiaan en het punt op 90° oosterlengte – zie afbeelding 3. Deze punten vormen een gelijkzijdige driehoek met drie loodrechte hoeken! Zo'n driehoek bestaat niet in het platte vlak, wat bewijst dat iedere platte kaart van het bolle aardoppervlak vertekening moet vertonen. Voor iedere driehoek

op een bol geldt dat de hoekensom groter is dan 180° . Het hoekoverschot, dus de hoekensom minus 180° , is rechtevenredig met de oppervlakte van de driehoek. Heel kleine driehoekjes hebben dus maar een heel klein hoekoverschot. (Een driehoek op het aardoppervlak met een oppervlakte van 1 m^2 heeft een hoekoverschot van 10^{-12} graad.)



Afbeelding 3: een driehoek op een bol. Door de noordpool (langs grote cirkels) te verbinden met twee punten op de evenaar, kunnen we op de bol een driehoek tekenen waarvan alle drie de hoeken 90 graden zijn.

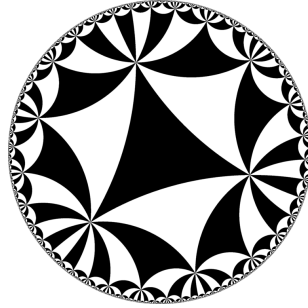
2.2 Het hyperbolische vlak

Wij hebben geluk dat we ons een boloppervlak kunnen voorstellen en ook vertrouwd zijn met platte kaarten van dat oppervlak. Als je op zo'n kaart in ieder punt een formule hebt voor de lengte van korte lijnstukjes, dan heb je de bol eigenlijk niet meer nodig. De platte kaart plus deze formule bepalen dan de meetkunde van de bol. Zo'n formule wordt *metriek* genoemd. Bernhard Riemann (1826–1866) bedacht dat we dus allerlei nieuwe meetkundes kunnen uitvinden door verschillende metrieken te bedenken! Dat idee is fundamenteel in Einsteins algemene relativiteitstheorie.

In afbeelding 4 zie je een voorbeeld van zo'n Riemannse meetkunde. Deze meetkunde heet het *hyperbolische vlak*. Net zoals bij platte afbeeldingen van de bol is er sprake van vertekeningen. De driehoeken lijken naar de rand steeds kleiner te worden, maar in werkelijkheid zijn ze allemaal even groot! De geodeten (“rechte lijnen”) in deze meetkunde zijn de halve lijnen en halve cirkels die loodrecht op de rand staan. Deze geodeten zijn oneindig lang, want hoe dicht je ook bij de rand zit, tot de rand heb je altijd nog oneindig veel driehoeken te gaan en alle driehoeken zijn even lang, ondanks de vertekening.

Er zijn twee typen hyperbolische lijnen: halve cirkels en halve lijnen loodrecht op de rand. We hebben ze echt allebei nodig, want we willen – net als in het platte vlak – dat door ieder tweetal punten een hyperbolische lijn gaat.

Nu wat goed nieuws: in tegenstelling tot lengtes, oppervlaktes en geodeten zijn de hoeken in afbeelding 4 niet vertekend. De hoeken die we met onze euclidisch getrainde ogen zien, zijn ook de hoeken van de hyperbolische meetkunde. Als je nu naar een driehoek kijkt op het hyperbolische vlak, dan zie je dat de



Afbeelding 4: een platte projectie van het hyperbolische vlak. Het hyperbolische vlak is gevuld met even grote driehoeken, die vervolgens zo vervormd zijn dat ze in het tweedimensionale vlak passen. Afbeelding: Anton Sherwood.

hoekensom kleiner is dan 180° . Het hoektekort, dus 180° minus de hoekensom, blijkt rechtevenredig te zijn met de oppervlakte van de driehoek. Net als op de bol is voor kleine driehoekjes de hoekensom dus wel bijna gelijk aan 180° .

2.3 Isometrieën van het hyperbolische vlak

In de wiskunde is het bij iedere structuur belangrijk te onderzoeken welke afbeeldingen die structuur behouden. In de euclidische meetkunde bekijken we dus afbeeldingen van het vlak naar zichzelf die de afstand bewaren. Deze afbeeldingen worden isometrieën genoemd. Een voorbeeld van zo'n isometrie in het platte vlak is de loodrechte spiegeling in een lijn, kortweg lijnspiegeling genoemd. Zo'n lijnspiegeling behoudt afstand, want als je een lijnstuk spiegelt, krijg je een lijnstuk van dezelfde lengte. Door verschillende lijnspiegelingen te combineren, krijg je andere isometrieën zoals rotaties, translaties en puntspiegelingen.

In het hyperbolische vlak geldt vrijwel hetzelfde. Ook daar kun je loodrechte lijnspiegelingen definiëren, waarbij de "lijn" een hyperbolische lijn is, een geodeet, dus zo'n halve lijn of halve cirkel loodrecht op de rand. Dit is een hyperbolische isometrie: een afbeelding van het hyperbolische vlak naar zichzelf die de hyperbolische afstand bewaart. Door deze hyperbolische lijnspiegelingen te combineren krijg je alle andere hyperbolische isometrieën. Er bestaan hyperbolische versies van rotaties en van puntspiegelingen.

Als je een lijnspiegeling toepast op een figuur, krijg je het spiegelbeeld. Dat spiegelbeeld ziet er in het algemeen anders uit. Wiskundigen zeggen dat de figuren *omgekeerd georiënteerd* zijn. Als je twee lijnspiegelingen toepast, dan krijg je weer de oorspronkelijke oriëntatie. Dat is het geval bij rotaties, translaties en puntspiegelingen. Deze worden daarom oriëntatiebehoudend genoemd, terwijl lijnspiegelingen oriëntatie-omkerend zijn. Precies hetzelfde geldt in het hyperbolische vlak.

Meer goed nieuws: er bestaan eenvoudige formules voor hyperbolische isometrieën. We starten met het halve vlak bestaande uit alle punten $(x, y) \in \mathbf{R}^2$



Afbeelding 5: spiegelingen en oriëntatie. Een spiegeling draait oriëntatie om. Vanaf de bergtop gezien staan de donkere bomen links en de lichte bomen rechts. Vanaf de gespiegelde bergtop bekeken staan de donkere bomen juist rechts en de lichte links. Foto: Oregon's Mt. Hood Territory.

met $y > 0$. Het is handig om zo'n punt (x, y) te identificeren met het complexe getal $z = x + iy$. Het halve vlak is dan

$$\mathbf{H}^2 = \{x + iy \in \mathbf{C} \mid y > 0\}.$$

De oriëntatiebehoudende isometrieën van \mathbf{H}^2 blijken nu de afbeeldingen

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

te zijn, waarbij $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ een reële 2×2 -matrix is met positieve determinant $ad - bc > 0$. De reële 2×2 -matrix is met negatieve determinant $ad - bc < 0$ definiëren de oriëntatie-omkerende isometrieën van \mathbf{H}^2 door

$$z \mapsto \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d},$$

waarbij $\bar{z} = x - iy$ voor $z = x + iy$.

We bekijken een paar voorbeelden om iets meer gevoel te krijgen voor deze afbeeldingen.

1. De oriëntatiebehoudende isometrie bij $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ is de afbeelding $z \mapsto z + b$, dus $(x, y) \mapsto (x + b, y)$. Dit is een horizontale translatie.
2. De oriëntatiebehoudende isometrie bij $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ voor $a > 0$ is de afbeelding $z \mapsto az$, dus $(x, y) \mapsto (ax, ay)$. Euclidische puntvermenigvuldiging vanuit $(0, 0)$ met een factor $a > 0$ is dus een hyperbolische isometrie! We zien dit terug in het plaatje van Escher: voor onze euclidische ogen lijkt die afbeelding $(x, y) \mapsto (ax, ay)$ geen congruentie, maar

slechts een gelijkvormigheid. Maar hyperbolisch is het een wel een congruentie: alle hagedissen zijn congruent, dus niet alleen gelijkvormig, maar ook even groot!

3. De oriëntatie-omkerende isometrie bij $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ is de afbeelding $z \mapsto -\bar{z}$, dus $x + iy \mapsto -x + iy$. Dit is de hyperbolische lijnspiegeling in de hyperbolische lijn $x = 0$.
4. De oriëntatie-omkerende isometrie bij $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ is de afbeelding $z \mapsto 1/\bar{z}$. Dit is de hyperbolische lijnspiegeling in de hyperbolische lijn $|z| = 1$ (de halve cirkel met randpunten $(\pm 1, 0)$).
5. Als de bovenstaande hyperbolische lijnspiegelingen achter elkaar uitvoeren, krijgen we de hyperbolische puntspiegeling in het punt $(0, 1) = i$. Dit is de afbeelding $z \mapsto -1/z$.

2.4 De rand van het hyperbolische vlak

De punten $(x, y) = x + iy$ met $y = 0$ liggen op de rand van het hyperbolische vlak. Deze rand noteren we als $\partial\mathbf{H}^2$. We kunnen de hyperbolische isometrieën beperken tot deze rand. We vinden dan

$$x \mapsto \frac{ax + b}{cx + d}.$$

De oriëntatiebehoudende afbeeldingen hebben $ad - bc > 0$ en de oriëntatie-omkerende hebben $ad - bc < 0$. Om verschillende redenen is het een goed idee om ook $x = \infty$ toe te laten:

1. Het hyperbolische vlak heeft ook cirkelschijfmodellen. Daarin zie je dat de rand van het hyperbolische vlak een gesloten kromme is.
2. Halve cirkels hebben twee eindpunten op de rand. Halve lijnen zijn net zo goed hyperbolische lijnen. Hyperbolische isometrieën kunnen halve lijnen in halve cirkels overvoeren en omgekeerd, dus de lijnen zijn voor een hyperbolisch meetkundige volkomen equivalent. (*Ze lijken* hoogstens verschillend op onze vertekende kaart.) We willen dus dat de hyperbolische lijn $x = x_0$ ook twee randpunten heeft. Het ene randpunt is $(x_0, 0) = x_0$. Het andere randpunt is $(x_0, \infty) = x_0 + i\infty$.

Het blijkt een goed idee te zijn om alle getallen $x_0 + i\infty$ te identificeren, dus

$$i\infty = 1 + i\infty = -17 + i\infty = \pi\sqrt{2} - 7 + i\infty = \dots.$$

Alle verticale lijnen gaan dus naar hetzelfde punt in oneindig. Als je de hyperbolische lijnspiegeling $z \mapsto -1/\bar{z}$ toepast op de verzameling van verticale lijnen, dan krijg je de verzameling halve cirkels met een eindpunt in $(0, 0)$ plus de lijn

$x = 0$. Nu zie je heel goed hoe oneindig veel hyperbolische lijnen naar hetzelfde punt op de rand convergeren.

Al met al voegen we dus één punt $i\infty$ toe aan \mathbf{R} . Die $i\infty$ kunnen we ook invullen voor z in de transformatie $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$. We vinden dan

$$\frac{a \cdot i\infty + b}{c \cdot i\infty + d} = \frac{a}{c}.$$

In het bijzonder geldt voor $a = 0$:

$$\frac{b}{c \cdot i\infty + d} = 0.$$

We kunnen dus prima met oneindig rekenen! En dat is maar goed ook, want we willen ook een antwoord uit $\frac{ax+b}{cx+d}$ krijgen voor $x = -d/c$. Voor deze waarde van z delen we door 0 en op school hebben we geleerd dat dat ‘niet mag’. Nu laten we ons door schoolmeesters de wet niet voorschrijven, maar we moeten wel accepteren dat $\frac{ax+b}{0}$ geen gewoon reëel getal is. We voeren dus een nieuw getal ‘ $\pm\infty$ ’ in en definiëren

$$\frac{w}{0} = \pm\infty$$

voor ieder complex getal $w \neq 0$. Tot slot identificeren we ∞ , $-\infty$ en $i\infty$, want als je rekent met de uitdrukking $\frac{az+b}{cz+d}$ gedragen deze ‘getallen’ zich precies hetzelfde:

$$\frac{a \cdot z + b}{c \cdot z + d} = \frac{a}{c}$$

voor $z = i\infty$, $z = \infty$, $z = -\infty$ en $z = x_0 + i\infty$.

Al met al voegen we dus precies één punt aan \mathbf{R} toe om de rand van \mathbf{H}^2 te krijgen:

$$\partial\mathbf{H}^2 = \mathbf{R} \cup \{\infty\}.$$

Het helpt om je voor te stellen dat je \mathbf{R} eerst uitbreidt met $+\infty$ rechts en $-\infty$ links – dus $(-\infty, \infty)$ uitbreidt naar $[-\infty, \infty]$ – en vervolgens $+\infty$ aan $-\infty$ vastplakt. Het resultaat is een gesloten kromme, een lus. We hadden in het cirkelmodel van het hyperbolische vlak al gezien dat de rand van \mathbf{H}^2 er zo uit ziet. We hebben dit nu ook voor ons bovenhalfvlakmodel bereikt.

2.5 De reële projectieve lijn

Het object $\mathbf{R} \cup \{\infty\}$ wordt de *reële projectieve lijn genoemd*. In het vervolg kort ik dit af toe *projectieve lijn* en ik noteer het object als $\widehat{\mathbf{R}}$. Andere standaardnotaties zijn \mathbf{P}^1 , \mathbf{P}_1 , \mathbf{RP}^1 , \dots . Op $\widehat{\mathbf{R}}$ hebben we de transformaties

$$x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d},$$

waarbij de hierboven geïntroduceerde rekenregels voor ∞ gelden. (We nemen steeds aan dat de coëfficiënten a, b, c, d reëel zijn en voldoen aan $ad - bc \neq 0$.) Deze transformaties worden *projectieve transformaties*.

2.6 Holografie

We hebben nu enerzijds het 2-dimensionale hyperbolische vlak \mathbf{H}^2 met zijn oriëntatiebehoudende en -omkerende hyperbolische transformaties en anderzijds de 1-dimensionale rand $\partial\mathbf{H}^2 = \widehat{\mathbf{R}}$ van \mathbf{H}^2 met zijn projectieve transformaties.

Beide worden bepaald door een reële 2×2 -matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ met determinant $ad - bc \neq 0$. Een hyperbolische transformatie van \mathbf{H}^2 wordt bepaald door zijn beperking tot de rand $\widehat{\mathbf{R}}$ en omgekeerd bepaalt iedere projectieve transformatie op de rand $\widehat{\mathbf{R}}$ een unieke reële 2×2 -matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ met $ad - bc \neq 0$ en daarmee een unieke hyperbolische isometrie van \mathbf{H}^2 .

Het hyperbolische vlak \mathbf{H}^2 en de projectieve lijn $\widehat{\mathbf{R}}$ zijn dus twee ‘meetkundes’ met ‘dezelfde’ transformaties. Volgens de wiskundige Felix Klein (1849 – 1925) zijn deze twee meetkundes daarom ‘gelijk’, hoewel ze verschillende dimensies hebben! Ieder begrip uit de hyperbolische meetkunde van \mathbf{H}^2 kun je dus vertalen naar een begrip van de projectieve meetkunde van $\widehat{\mathbf{R}}$ en omgekeerd. ‘Meetkundige begrippen’ zijn daarbij begrippen die bewaard blijven onder alle transformaties in kwestie. Een ‘cirkel’ is bijvoorbeeld een euclidisch begrip, omdat alle euclidische isometrieën cirkels in cirkels overvoeren. Maar ‘horizontaal’ is geen euclidisch begrip, omdat rotaties en lijnspiegelingen horizontale lijnen op niet-horizontale lijnen kunnen afbeelden.

We gaan nu het volgende spelletje spelen: vertaal gegeven begrippen uit de hyperbolische meetkunde van \mathbf{H}^2 naar begrippen uit de projectieve meetkunde van $\widehat{\mathbf{R}}$ en omgekeerd.

2.6.1 Hyperbolische lijn

Het eenvoudigste voorbeeld zijn de vertalingen van het begrip ‘hyperbolische lijn in \mathbf{H}^2 ’. Zo’n lijn heeft twee eindpunten op de rand $\widehat{\mathbf{R}}$ en die twee punten bepalen de hyperbolische lijn. We kunnen het begrip ‘hyperbolische lijn in \mathbf{H}^2 ’ dus laten corresponderen met het begrip ‘paar van punten in $\widehat{\mathbf{R}}$ ’ in de projectieve meetkunde van $\widehat{\mathbf{R}}$. Samenvattend:

$$\text{hyperbolische lijn in } \mathbf{H}^2 \leftrightarrow \text{paar punten in } \widehat{\mathbf{R}}.$$

2.6.2 Hyperbolische lijnspiegeling

Een ander eenvoudig voorbeeld is het begrip ‘hyperbolische lijnspiegeling in \mathbf{H}^2 ’. Als we die hyperbolische lijnspiegeling beperken tot de rand $\widehat{\mathbf{R}}$, vinden we een projectieve transformatie σ van $\widehat{\mathbf{R}}$ met de volgende eigenschappen: (a) σ is niet de identiteitsafbeelding, dus er is minstens één punt in $\widehat{\mathbf{R}}$ dat door σ niet op zichzelf wordt afgebeeld; (b) σ^2 is wel de identiteitsafbeelding, dus als voor een willekeurig punt P in $\widehat{\mathbf{R}}$ geldt dat $\sigma(\sigma(P)) = P$; (c) σ heeft precies twee fixpunten in $\widehat{\mathbf{R}}$, dus punten die door σ op zichzelf worden afgebeeld. Een projectieve transformatie van $\widehat{\mathbf{R}}$ met eigenschappen (a) en (b) heet een *involutie*. Een involutie met eigenschap (c), dus een involutie met twee fixpunten, heet een *hyperbolische*

involutie. (Dit gebruik van het woord ‘hyperbolisch’ heeft overigens hoogstens indirect iets te maken met het bijvoegelijk naamwoord ‘hyperbolisch’ in ‘hyperbolisch vlak’.) Een gemakkelijker naam zou misschien *oriëntatie-omkerende involutie* zijn, maar ‘hyperbolische involutie’ is nu eenmaal standaard. Samenvattend:

hyperbolische lijnspiegeling in $\mathbf{H}^2 \leftrightarrow$ hyperbolische involutie op $\widehat{\mathbf{R}}$.

Een hyperbolische lijn wordt bepaald door de bijbehorende hyperbolische lijnspiegeling, dus we kunnen ook schrijven

hyperbolische lijn in $\mathbf{H}^2 \leftrightarrow$ hyperbolische involutie op $\widehat{\mathbf{R}}$.

2.6.3 Hyperbolisch punt

Een lastiger vraag is wat correspondeert op $\widehat{\mathbf{R}}$ met een hyperbolisch punt P in \mathbf{H}^2 . Het gemakkelijkste is om zo’n punt te representeren door de bijbehorende hyperbolische puntspiegeling. Die puntspiegeling bepaalt immers het punt P . De beperking tot de rand $\widehat{\mathbf{R}}$ van die puntspiegeling is uiteraard weer een involutie. De voor de hand liggende naam zou *oriëntatiebehoudende involutie* of *fixpuntvrije involutie* zijn, maar de traditionele naam is *elliptische involutie*, waarbij ‘elliptisch’ betekent dat de involutie geen fixpunten in $\widehat{\mathbf{R}}$ heeft. Samenvattend:

hyperbolisch punt in $\mathbf{H}^2 \leftrightarrow$ elliptische involutie op $\widehat{\mathbf{R}}$.

2.6.4 Incidentie

Stel ik heb een hyperbolisch punt P en een hyperbolische lijn ℓ in \mathbf{H}^2 . Daarmee corresponderen een elliptische involutie π respectievelijk een elliptische involutie σ op $\widehat{\mathbf{R}}$. Hoe vertaal ik de eigenschap ‘incidentie’, dus ‘ P ligt op ℓ ’ naar $\widehat{\mathbf{R}}$? Je kunt bewijzen dat dit correspondeert met de eigenschap ‘ $\sigma(\pi(A)) = \pi(\sigma(A))$ voor alle $A \in \widehat{\mathbf{R}}$ ’. We zeggen dat de involuties π en σ *commuteren*. Samenvattend:

incidentie in $\mathbf{H} \leftrightarrow$ commuterende elliptische en hyperbolische involutie op $\widehat{\mathbf{R}}$.

2.6.5 Commuterende involuties

Gegeven twee involuties op $\widehat{\mathbf{R}}$. Als ze beide corresponderen met hyperbolische lijnen dan commuteren ze precies dan als die lijnen loodrecht staan. Als de ene involutie correspondeert met een hyperbolische lijn en de ander met een hyperbolisch punt, dan commuteren ze precies dan als het punt op de lijn ligt. Maar als beide involuties op $\widehat{\mathbf{R}}$ corresponderen met hyperbolische punten, dan kunnen ze niet commuteren en dat is maar goed ook, want waarin zouden de bijbehorende paren punten in \mathbf{H}^2 zich dan onderscheiden van andere paren?

2.6.6 Hyperbolische hoek

Gegeven twee hyperbolische lijnen ℓ en m die elkaar in een hyperbolisch punt P snijden. Om de hoek $\angle(\ell, m)$ te vertalen naar $\widehat{\mathbf{R}}$ kijk je naar de twee maal twee eindpunten op $\widehat{\mathbf{R}}$, dus de paren fixpunten van de twee bijbehorende involuties op $\widehat{\mathbf{R}}$. Als ℓ eindpunten a en b in $\widehat{\mathbf{R}}$ heeft en m heeft eindpunten c en d in $\widehat{\mathbf{R}}$, dan geldt

$$\cos(\angle(\ell, m)) = \left| \frac{1+p}{1-p} \right|,$$

waarbij

$$p := \frac{(c-a)(d-b)}{(d-a)(c-b)}$$

de *dubbelverhouding* van het viertal (A, B, C, D) is.

2.6.7 Harmonisch viertal

Een viertal punten op $\widehat{\mathbf{R}}$ heet *harmonisch* als hun dubbelverhouding -1 is. Harmonische viertallen op $\widehat{\mathbf{R}}$ zijn de eindpunten van loodrechte hyperbolische lijnen in \mathbf{H}^2 en corresponderen daar dus mee.

2.6.8 Hyperbolische afstand

Gegeven twee punten P, Q in het hyperbolische vlak. Hoe vertalen we de hyperbolische afstand naar de rand $\widehat{\mathbf{R}}$? Allereerst nemen we de hyperbolische verbindingslijn $\ell = PQ$ en de twee loodlijnen m en n op ℓ door A respectievelijk B . Deze loodlijnen bepalen twee paren eindpunten A, B, C, D op $\widehat{\mathbf{R}}$. De dubbelverhouding p van deze vier punten bepaalt de hyperbolische afstand h tussen P en Q via de formule $h = |\log((1 - \sqrt{p})/(1 + \sqrt{p}))|$.

2.7 Meer voorbeelden

De meetkunde van \mathbf{H}^3 is gelijk aan die van de complexe projectieve lijn $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$. De meetkunde van \mathbf{H}^5 is gelijk aan die van de projectieve lijn over de quaternionen. De meetkunde van anti-de Sitter is gelijk aan de conforme meetkunde van zijn rand, want beide meetkundes hebben dezelfde groep van transformaties.

2.8 Een non-voorbeeld

Waarom werkten we hierboven met dat vreemde hyperbolische vlak? Waarom werkten we niet met de verwante, maar vertrouwdere bolmeetkunde? Dat is wel duidelijk: bijvoorbeeld omdat het boloppervlak geen rand heeft. Maar waarom nemen we niet het nog vertrouwdere euclidische vlak \mathbf{R}^2 ? Eerst het goede nieuws: ook dat vlak kun je uitbreiden met een projectieve lijn $\widehat{\mathbf{R}}$ en ook hier kun je de euclidische isometrieën beperken tot $\widehat{\mathbf{R}}$. Nog meer goed nieuws: de groep van euclidische isometrieën van \mathbf{R}^2 is ‘even groot’ als de groep van projectieve

transformaties van $\widehat{\mathbf{R}}$. (Preciezer: beide groepen hebben dimensie 3. Informeler: beide types transformaties worden bepaald door 3 continue parameters.)

Maar nu het slechte nieuws: je verliest veel informatie door een euclidische isometrieën van \mathbf{R}^2 te beperken tot de rand $\widehat{\mathbf{R}}$. Bijvoorbeeld hebben de loodrechte lijnspiegeling in de x - en y -as dezelfde beperking tot $\widehat{\mathbf{R}}$. Erger nog: alle translaties (inclusief de identiteitsafbeelding) van \mathbf{R}^2 beperken tot de identiteitsafbeelding van $\widehat{\mathbf{R}}$.

Nog slechter nieuws: de groep van euclidische isometrieën van \mathbf{R}^2 heeft een andere structuur dan de groep van projectieve transformaties van $\widehat{\mathbf{R}}$. Formeel gezegd: ze zijn niet isomorf. Dus ook op een andere manier dan ‘beperking tot de rand’ zijn ze niet aan elkaar gelijk te praten, want ze *zijn* niet gelijk. De meetkunde van \mathbf{R}^2 is dus fundamenteel anders dan die van $\widehat{\mathbf{R}}$ en daarmee ook fundamenteel anders dan die van \mathbf{H}^2 . Het is een wonderdij dat de meetkunde van \mathbf{H}^2 *wel* gelijk is aan die van $\widehat{\mathbf{R}}$.

3 Natuurkunde

Wat doet al deze wiskunde op een natuurkundewebsite? Het punt is dat veel wiskunde (zelfs theoretische, schijnbaar wereldvreemde wiskunde die door wiskundigen is ontwikkeld uit puur mathematische motieven) de opmerkelijke gewoonte heeft vroeg of laat in de natuurkunde op te duiken. Holografie is een voorbeeld hiervan. Hierboven zagen we een eenvoudig, precies en clean voorbeeld van holografie binnen de meetkunde. Dat voorbeeld kan helpen het principe achter complexere versies van holografie zoals de AdS/CFT-correspondentie uit de moderne natuurkunde te begrijpen.



Afbeelding 6: Évariste Galois (1811–1832). Artiest onbekend.

Op de avond voor zijn fatale duel schreef de 20-jarige Évariste Galois (1811–1832) hoe je kunt bewijzen dat er geen wortelformule bestaat voor vergelijkingen van graad 5. Hij deed dat met symmetrieën. Uit dit werk ontstond *gropentheorie*, de abstracte wiskundige studie van symmetrieën. Veertig jaar later stelde Felix Klein in zijn Erlanger Programma (1862) voor om groepen en symmetrieën centrum en startpunt van de meetkunde te maken. Tussendoor vond Bernhard Riemann de abstracte gekromde meetkunde uit.

Wat heeft deze 19e-eeuwse wiskunde nu met 21ste-eeuwse natuurkunde te maken? In Einsteins speciale relativiteitstheorie (Minkowski-meetkunde) spelen Lorentztransformaties een centrale rol en in zijn algemene relativiteitstheorie doen de coördinaattransformaties dat. In de quantummechanica waren groepentheoretische ideeën zo succesvol dat Wigner gefrustreerd sprak van Gruppenpest. In de deeltjesfysica spelen symmetrieën een fundamentele rol in de beschrijving van deeltjes en hun interactie. En in de beroemde AdS/CFT-correspondentie van Juan Maldacena zien we weer het oude holografische idee van Felix Klein: twee structuren (meetkundes) met dezelfde symmetrieën zijn equivalent. Wigner zou vast weer spreken van de “unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences”.