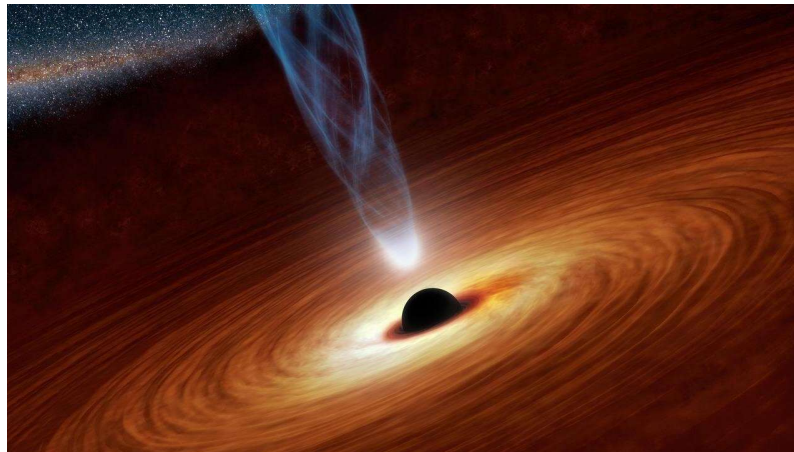


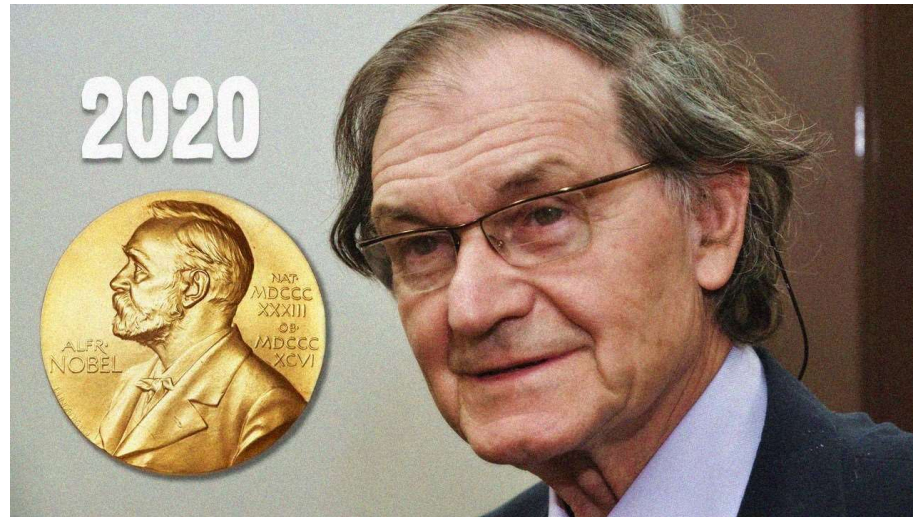
Hoe de wiskunde de natuurkunde kan helpen *(en omgekeerd)*



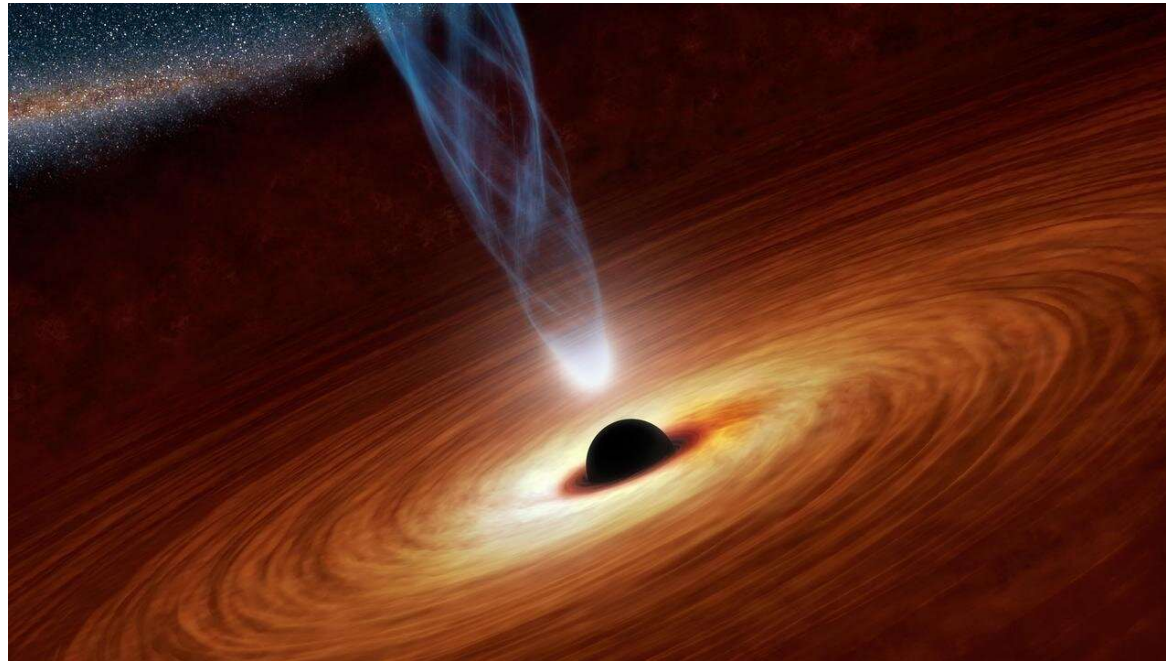
Marcel Vonk (UvA)

Viva Fysica, 29 januari 2021

Een Nobelprijswaardig onderwerp...



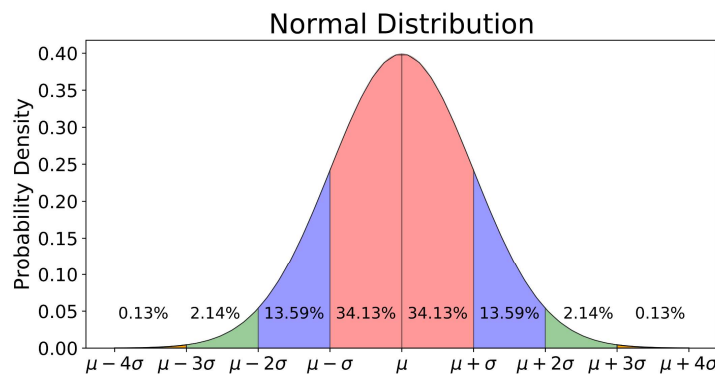
1. Wiskunde helpt de natuurkunde
2. Zwarte gaten
3. Natuurkunde helpt de wiskunde
4. Knopen



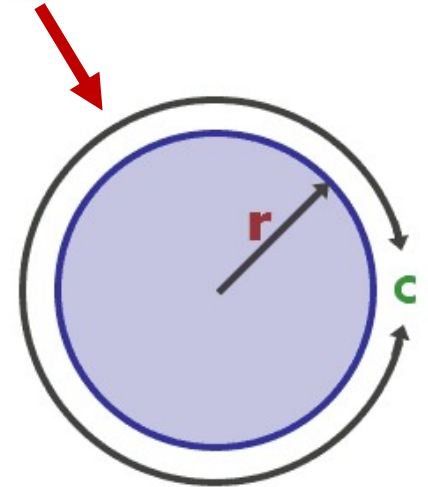
1. Wiskunde helpt de natuurkunde

Onredelijk effectief

Eugene Wigner (1960): *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences.*



$$f(x | \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



Waarom beschrijft wiskunde de natuur zo goed?

Waarom is de natuur überhaupt “logisch”?

Wiskunde helpt de natuurkunde

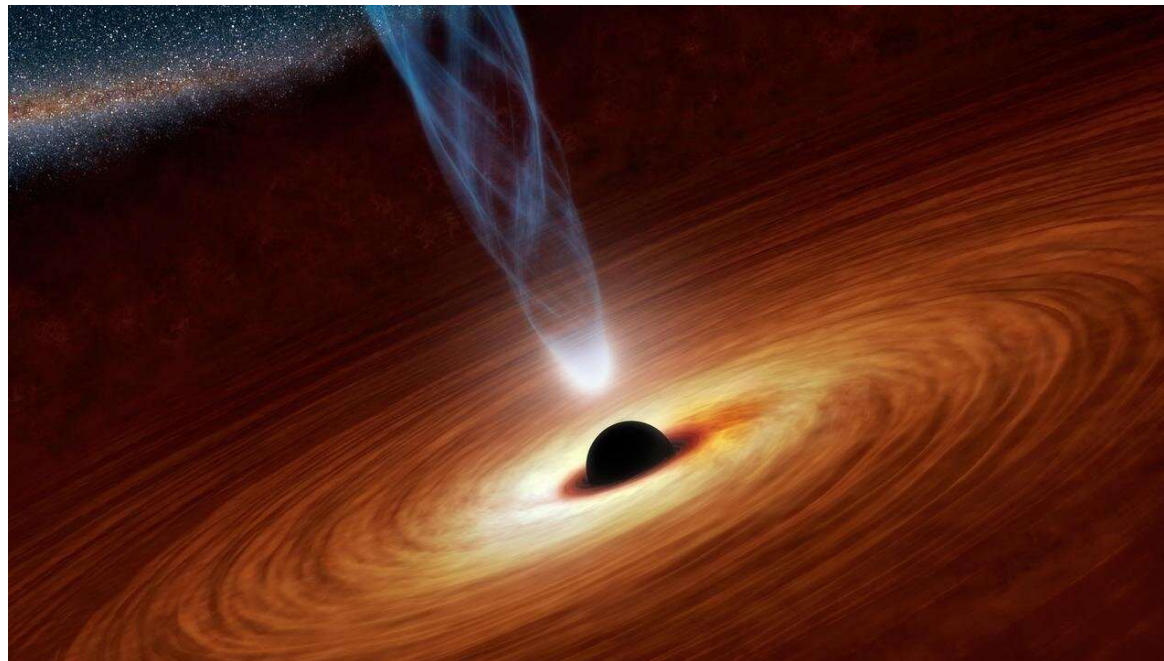
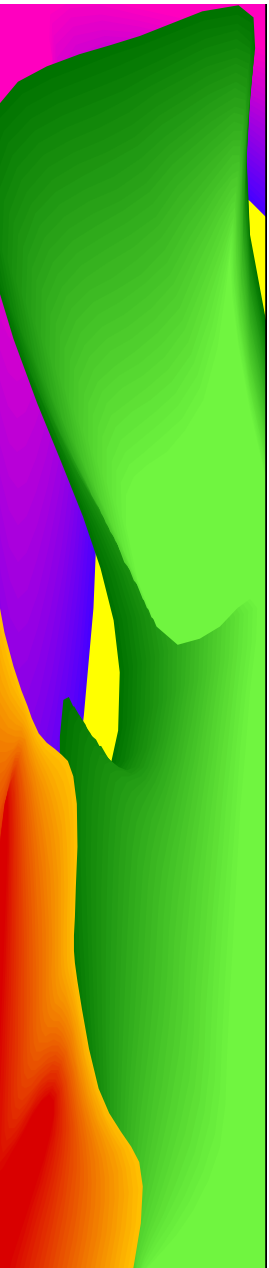
We kunnen de natuur beschrijven met **getallen**...



...maar er is veel meer wiskunde in de natuur!

- **Analyse** (functies, afgeleiden, integreren, ...)
- **Algebra** (vectoren, matrices, complexe getallen, ...)
- **Groepentheorie** (symmetrieën, ...)
- **Getaltheorie** (gehele getallen, deelbaarheid...)
- **Meetkunde** (kromming, dimensies, ...)
- **Topologie** (vormen, vervormingen, ...)
- ...

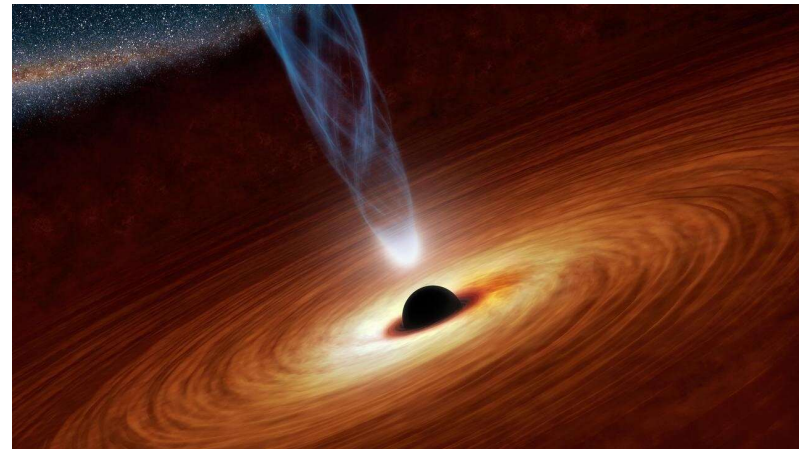
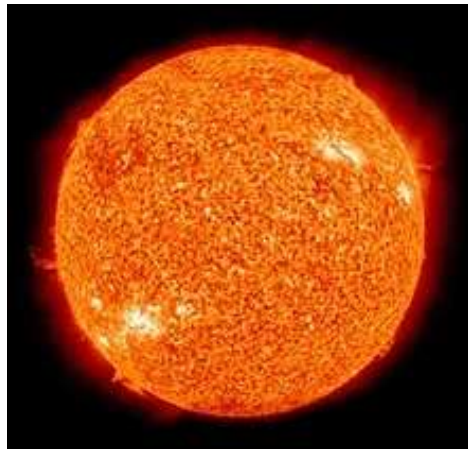
} Voorbeelden van vandaag



2. Zwarte gaten

Extreem zwaar

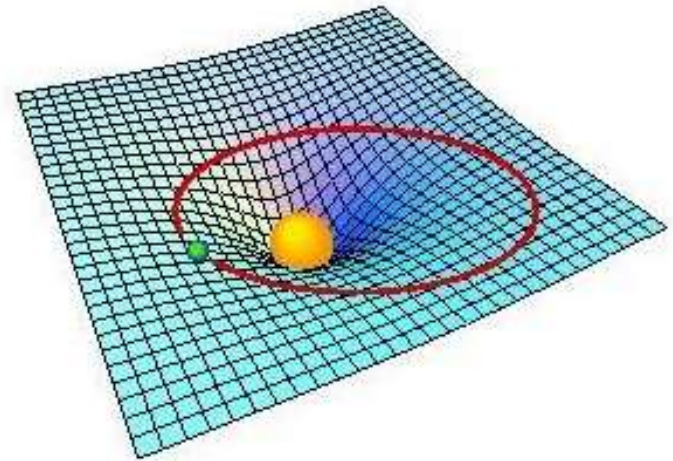
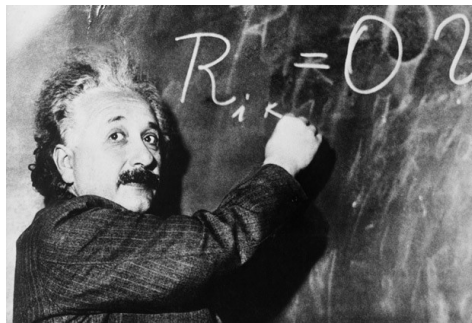
Als een ster is 'opgebrand' kan er een zwart gat ontstaan



- Sterkste bronnen van zwaartekracht!
- Zelfs licht kan **niet ontsnappen**.
- Ook hele kernen van sterrenstelsels kunnen een zwart gat worden!
(lezing van Nathalie Degenaar)

Kromme ruimte

Einstein ontdekte hoe we zulke sterke zwaartekracht écht moeten beschrijven

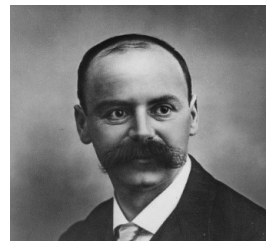
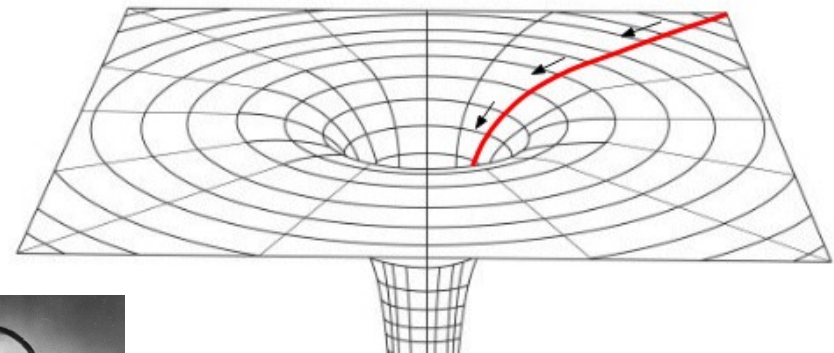
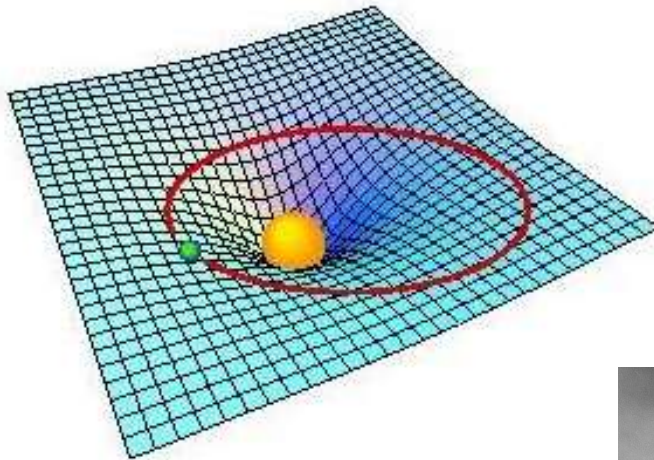


Kromme ruimte (en tijd)!

Zwaartekracht = meetkunde

Singulariteiten

Hoe ziet een zwart gat er van binnen uit?

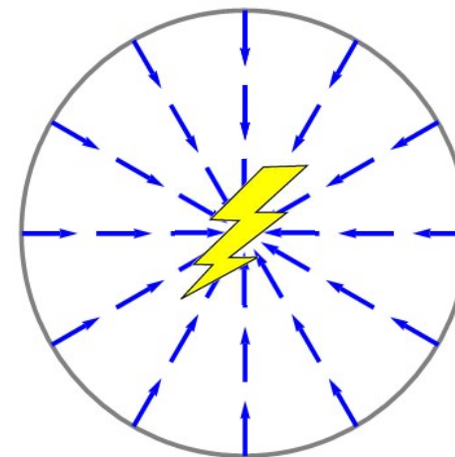
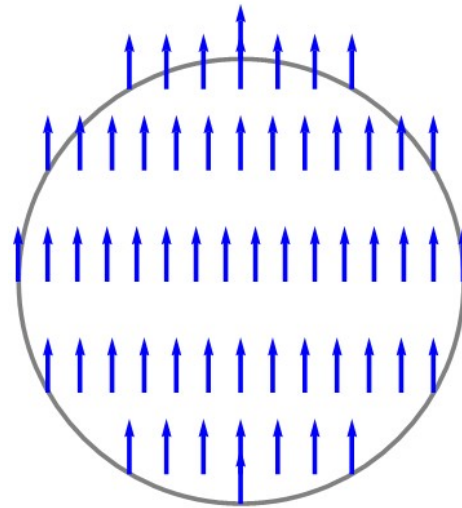


singulariteit?

Gaan kijken is geen goed idee... De wiskunde kan helpen!

Een voorbeeld

Een cirkel met pijlen (vaste lengte) in een plat vlak. Kun je de pijlen overal tekenen? Soms wel...

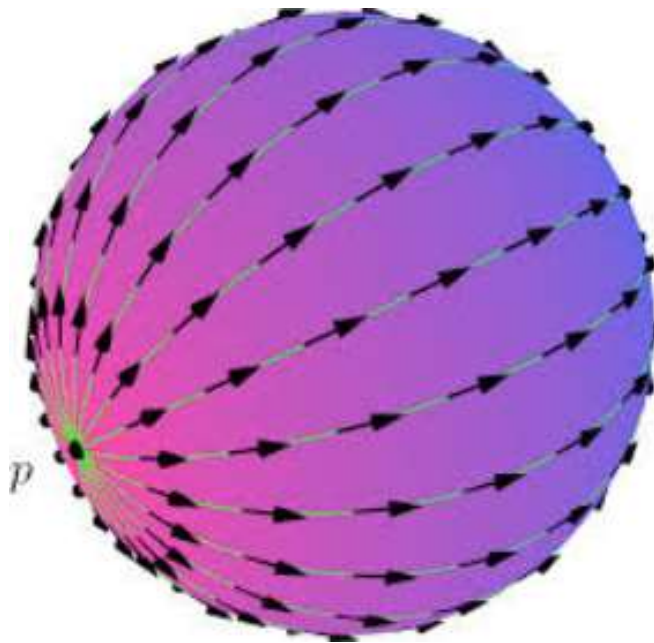


singulariteit!

...maar soms ook niet! **Meetkunde** en **topologie** in actie! Hoe werkt dat in een kromme ruimte?

Een kokosnoot kammen?

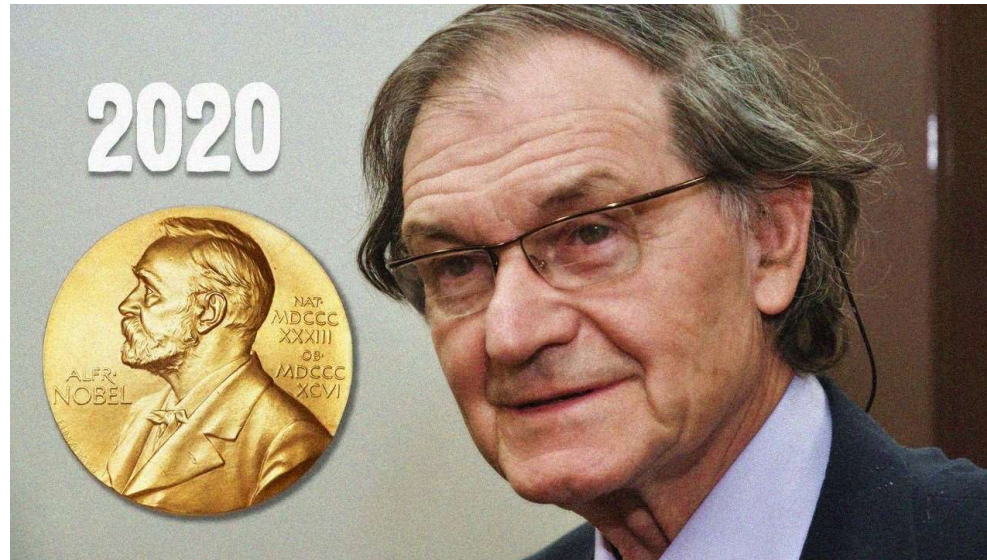
Op een bol kun je **nooit** overal de pijlen tekenen!



“Je kunt een kokosnoot niet kammen!” (*Hairy ball theorem*)

Van twee naar vier dimensies

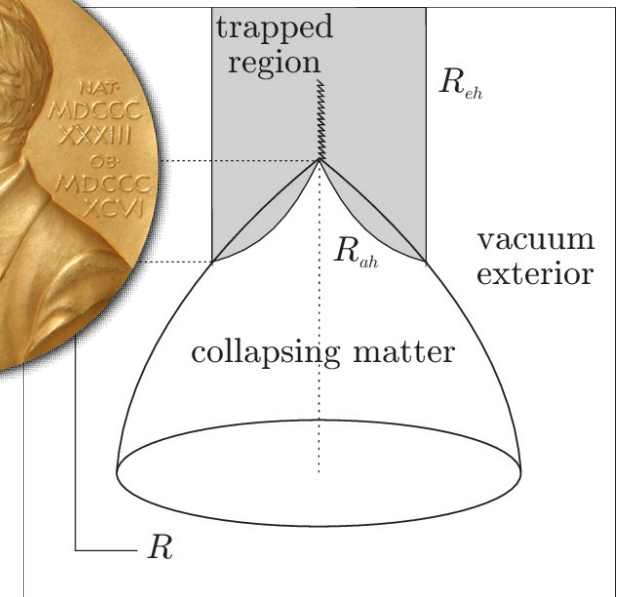
Kromme tweedimensionale meetkunde: **singulariteiten** zijn soms onvermijdelijk!



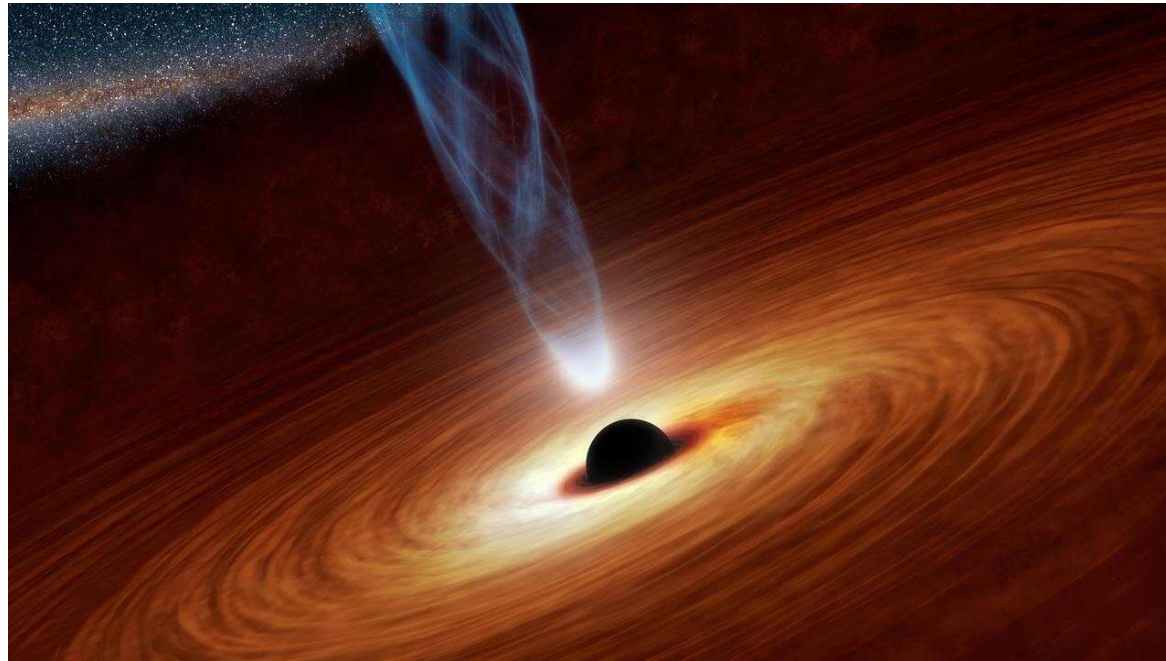
Penrose (en Hawking): iets soortgelijks geldt voor kromme **vierdimensionale** meetkunde!

Gevangen oppervlakken

Als een zwart gat ontstaat, ontstaat ook een gebied waaruit je niet meer kunt ontsnappen.



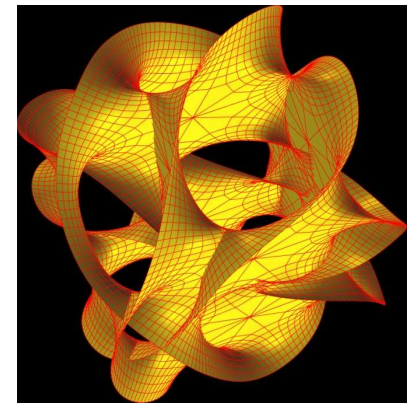
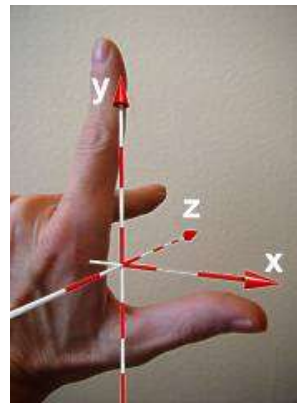
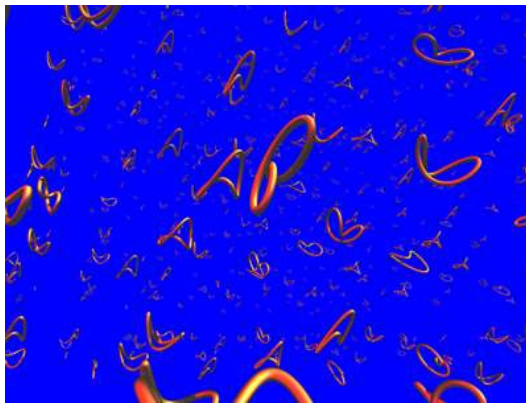
- Het oppervlak daarvan (*trapped surface*) is 'compact': het lijkt op een bol.
- Penrose bewees: hierdoor **moet** er in het midden wel een singulariteit zijn!



3. Natuurkunde helpt de wiskunde

Snaren, dimensies, and all that

Met name meetkunde en topologie zijn in de loop der jaren een steeds grotere rol gaan spelen in de natuurkunde.



Met name in de **snaartheorie**, een model dat zwaartekracht (relativiteit) en quantummechanica probeert te verenigen.

Nieuwe verbanden

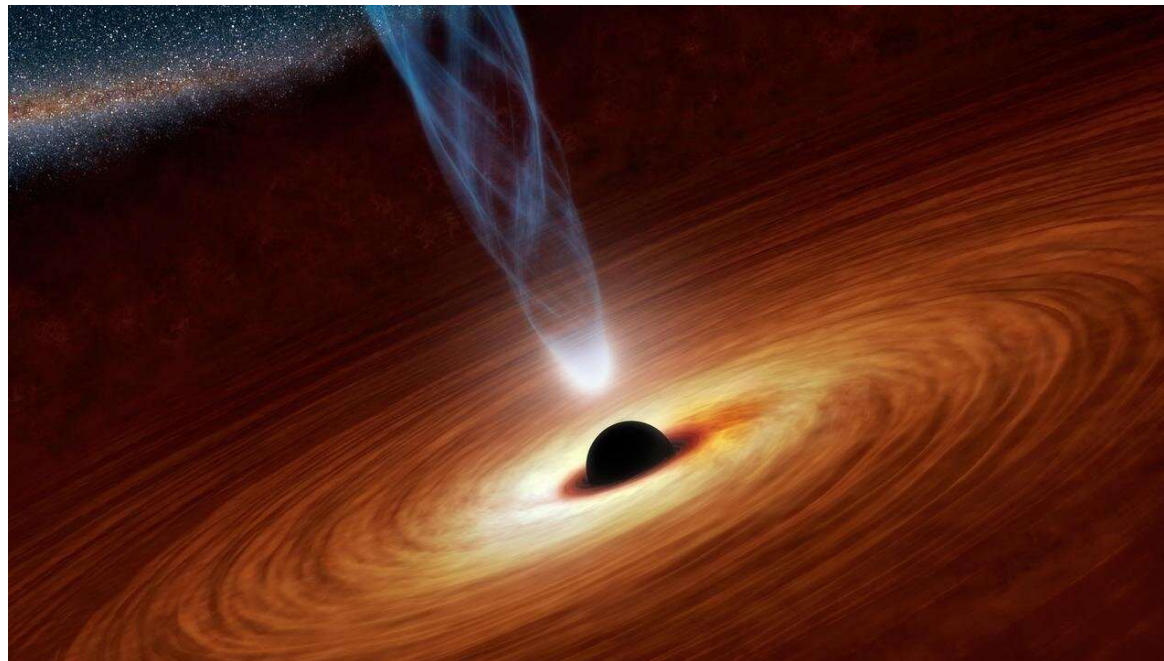
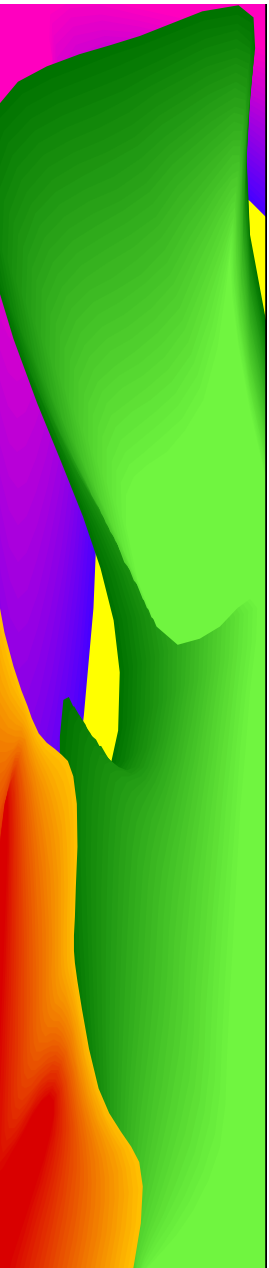
Het samenbrengen van verschillende soorten **natuurkunde** leidt ook tot het samenbrengen van soorten **wiskunde**.



Snaartheorie:

- **Quantummechanica** (*algebra, symmetrieën*)
- **Zwaartekracht** (*meetkunde, topologie*)

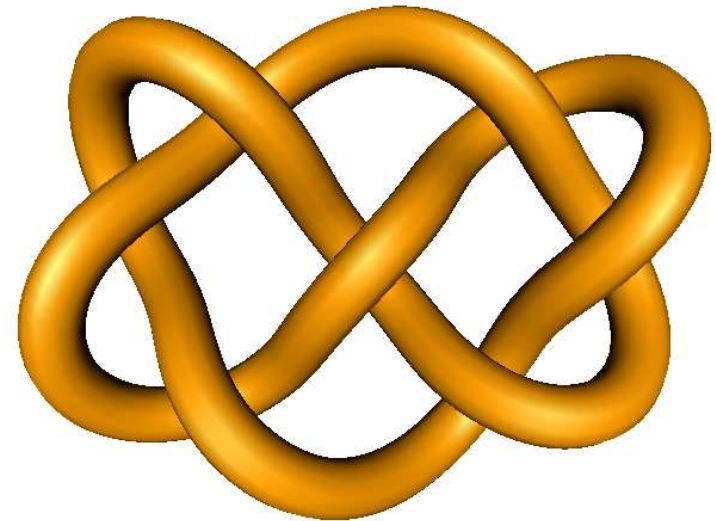
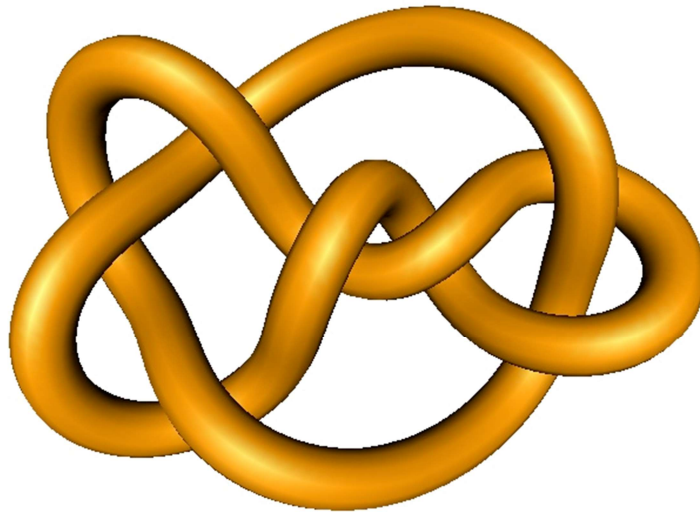
Nieuwe verbanden, nieuwe wiskunde!



4. Knopen

Knoop

Knopen in de wiskunde (topologie):



Vraag: Zijn de twee 'hetzelfde'?

Antwoord: **Nee...** maar bewijs dat maar eens!

Invarianten

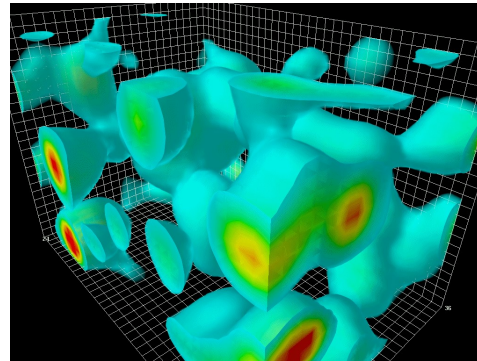
Wiskundigen zoeken naar '**invarianten**' van de knoop: iets dat niet verandert.



Andere invariant? Andere knoop!

Lege ruimte en quantummechanica

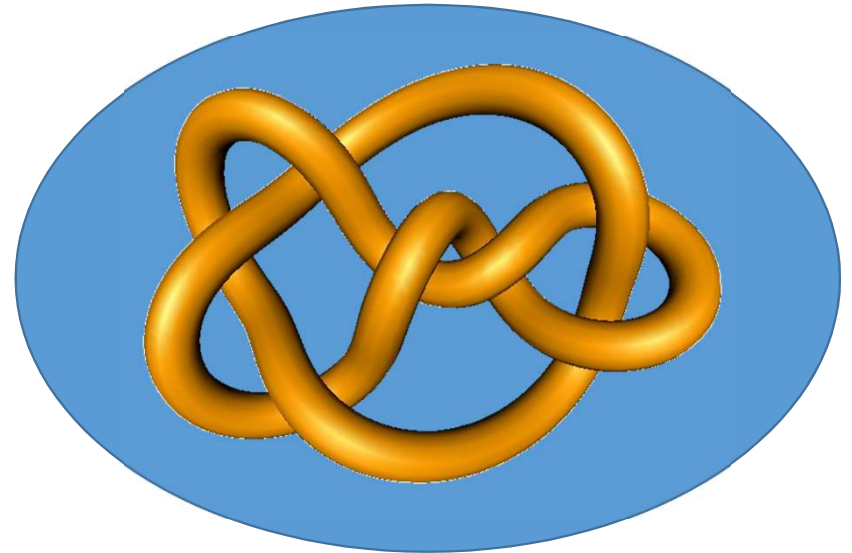
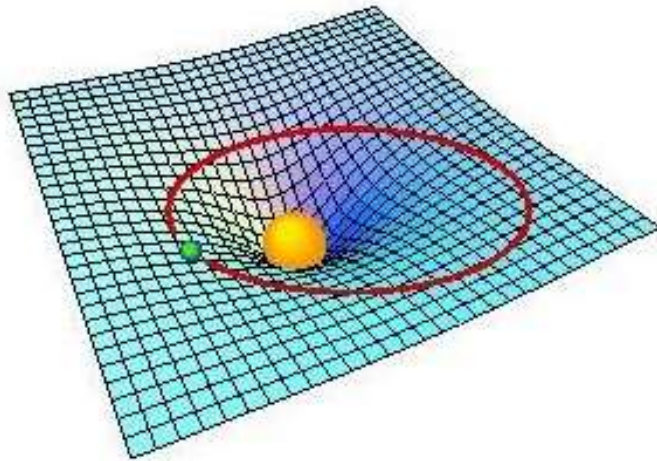
In de quantumfysica heeft de **lege ruimte** ook eigenschappen.



- Bijvoorbeeld: wat is de energie van lege ruimte?
- Niet één antwoord, maar verschillende antwoorden
- Je kunt een 'gemiddelde' van die antwoorden nemen: **partitiefunctie**.
- Die *functie* kan van allerlei parameters afhangen!

Lege ruimte en relativiteit

In de relativiteitstheorie kan lege ruimte krom zijn.



Het **complement** van een knoop is ook een kromme ruimte!

Weg met de meetkunde!

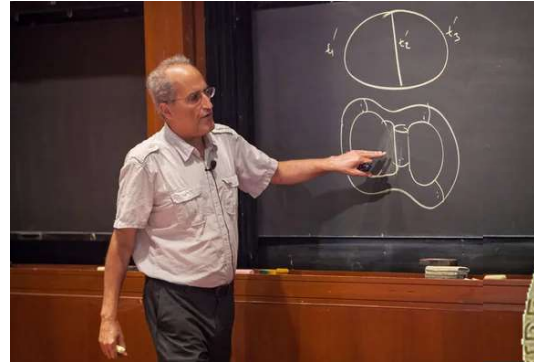
Vaak hangen quantumberekeningen niet alleen van de vorm (*topologie*) af, maar ook van de **meetkunde**...



...maar sommige quantumtheorieën hangen **alleen** van de globale vorm af! (*Topologische veldentheorieën*)

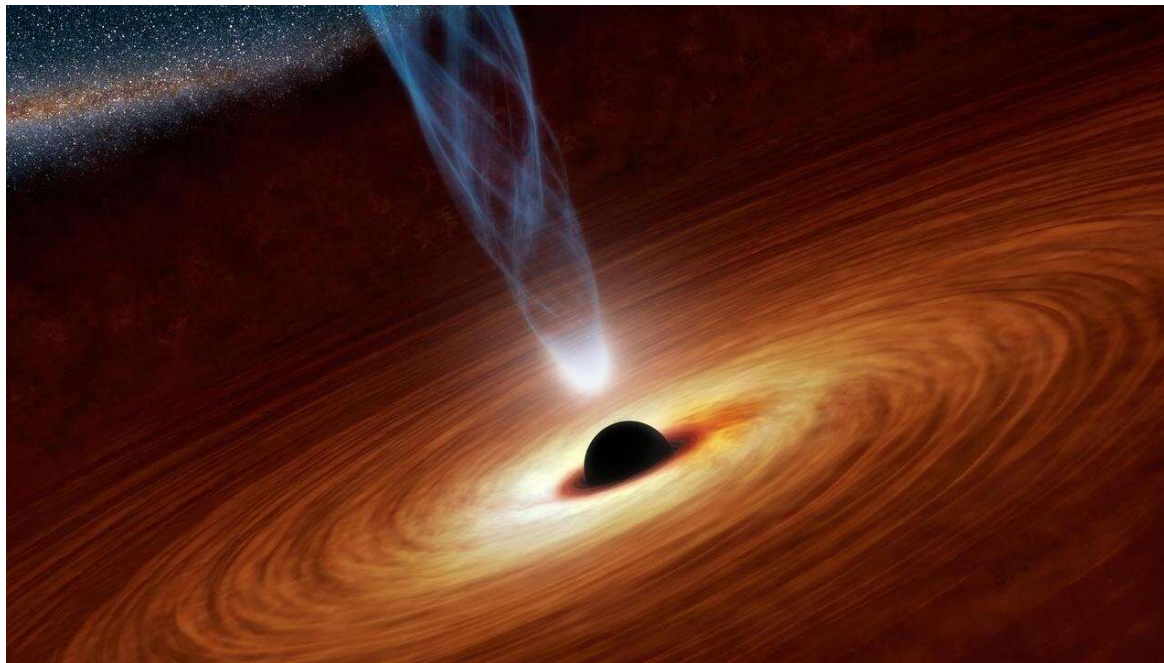
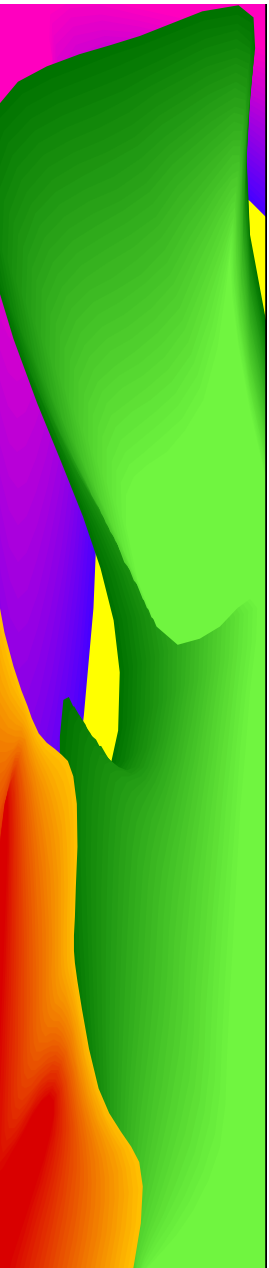
Knoopinvarianten!

Edward Witten (1989):



- Kies een topologische quantumtheorie
- Kies een knoop-complement als 'lege ruimte'
- Bereken de partitiefunctie
- Verandert niet als de knoop vervormt!
- Parameters: invarianten zijn **polynomen**!

$$f(x) = 2x^4 + 3x^3 + 17x^2 - 8x - 11$$



Dus...

Samen sterk

Wis- en natuurkunde helpen elkaar!

Je *kunt* natuurkunde doen zonder heel veel wiskunde te kennen...

Je kunt *zeker* wiskunde doen zonder veel natuurkunde te kennen...

...maar ken je ze allebei, dan kom je soms nog veel verder!

