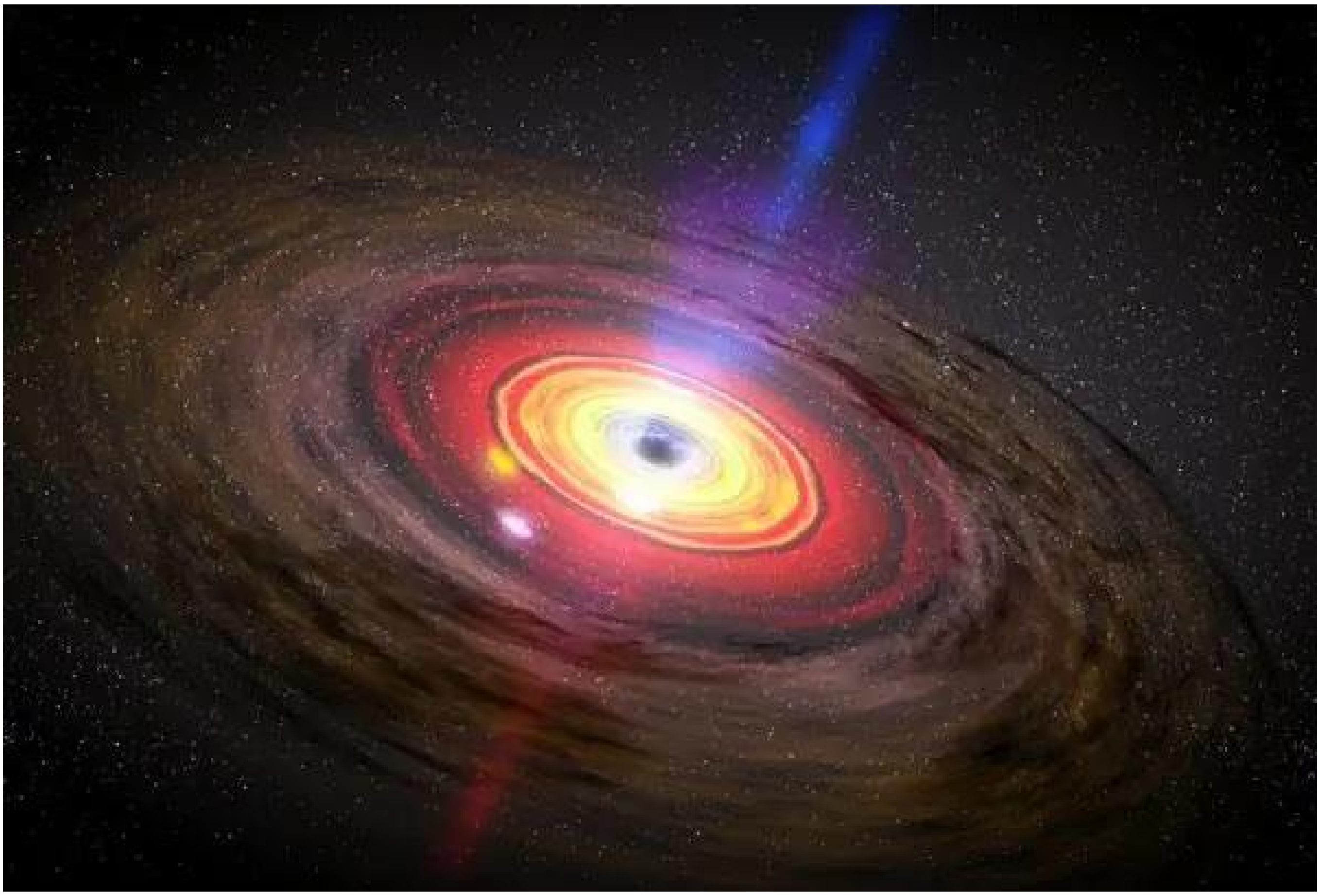
De formule van Cardy

In 1996 publiceerden theoretisch natuurkundigen Andrew Strominger en Cumrun Vafa een opmerkelijk resultaat, namelijk een berekening van het aantal microscopische toestanden van een zwart gat. Het tweetal gaf hiermee voor het eerst een microscopische verklaring voor de beroemde formule van Jacob Bekenstein en Stephen Hawking, die zegt dat de entropie van een zwart gat evenredig is met het oppervlak van zijn waarnemingshorizon. Sindsdien zijn er talloze vergelijkbare berekeningen uitgevoerd voor allerlei soorten zwarte gaten. Opvallend genoeg speelt de wiskundige getaltheorie hierin een grote rol, bijvoorbeeld in de vorm van de *Cardyformule*.

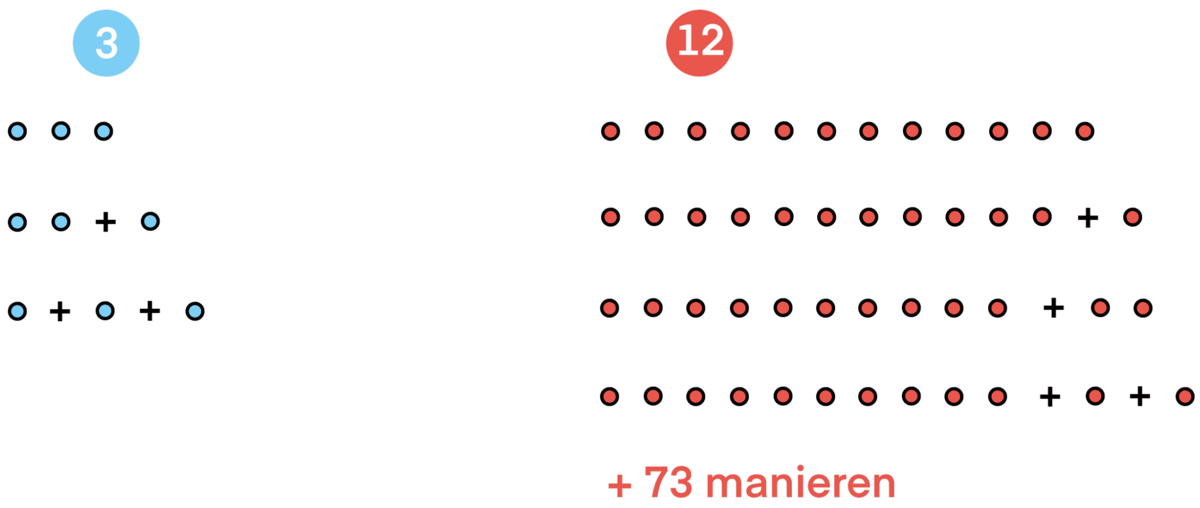


Artist's impression van een zwart gat. Getaltheorie – in de vorm van de Cardyformule-speelt een belangrijke rol in het begrijpen van de entropie van zwarte gaten. Afbeelding: NASA/Goddard Space Flight Center/Dana Berry (SkyWorks Digital).

De formule van Cardy geeft informatie over aantallen van microscopische toestanden door gebruik te maken van de bijzondere eigenschappen van modulaire vormen. Enkele weken geleden schreef ik al eens over deze wiskundige functies met een uitzonderlijk hoge mate van symmetrie. Modulaire vormen veranderen op een heel gecontroleerde manier onder een grote familie van transformaties, waaronder verschuivingen en inverteringen.

Een telprobleem met gehele getallen

Om te begrijpen wat de Cardyformule is en hoe deze tot stand komt, bekijken we eerst een eenvoudiger probleem. Neem een positief geheel getal in gedachten, bijvoorbeeld 3, 12 of 2026. Op hoeveel manieren kun je dit getal schrijven als een som van positieve gehele getallen? Voor kleine getallen is de vraag eenvoudig te beantwoorden. Het getal 3 kan bijvoorbeeld geschreven worden als 3, 2 + 1 of als 1 + 1 + 1. Drie manieren dus. Voor iets grotere getallen wordt het vraagstuk al een stuk ingewikkelder. Het getal 12 kan geschreven worden als 12, 11 + 1, 10 + 2, 10 + 1 + 1 en nog op 73 andere manieren. Dit ogenschijnlijk eenvoudige telprobleem loopt razendsnel uit de hand. Het getal 33 kan al op 10.142 verschillende manieren worden geschreven, en het getal 2026 kan op bijna 10^{46} (een één met 46 nullen erachter) manieren geschreven worden.



Getallen als sommen. Op hoeveel manieren kan een getal geschreven worden als som van positieve getallen? Voor kleine getallen is het relatief eenvoudig om handmatig alle manieren na te gaan, maar het aantal mogelijkheden groeit snel.

Handmatig alle manieren nagaan wordt dus al snel een onmogelijke opgave. Wiskundigen maken daarom gebruik van een slimme truc: een *genererende functie*. Dit is een wiskundige functie waarin alle antwoorden tegelijk zitten opgeslagen. Om preciezer te zijn: laat n een willekeurig geheel getal zijn en laat $d(n)$ het aantal manieren zijn waarop n geschreven kan worden als som. Dus: $d(3) = 3$, $d(12) = 77$ en $d(33) = 10{.}142$. De genererende functie is dan

$$Z(x) = d(0) + d(1)x + d(2)x^2 + d(3)x^3 +\dots$$

De variabele x kun je voor nu zien als een "boekhoudingshulpmiddel". We zullen later zien dat x ook een natuurkundige betekenis kan hebben. De coëfficiënt van x^n vertelt ons precies op hoeveel manieren n geschreven kan worden als som. Suzanne Bintanja liet in een eerder artikel zien dat deze functie ook geschreven kan worden in termen van een oneindig product:

$$Z(x) = \frac{1}{1-x}\times\frac{1}{1-x^2}\times\frac{1}{1-x^3}\times\cdots$$

Elke factor in de noemer houdt hierin bij hoe vaak een bepaald getal gebruikt wordt in een som. De eerste factor $\frac{1}{1-x}$ telt het aantal enen, de tweede factor $\frac{1}{1-x^2}$ telt het aantal tweeën, etcetera.

Voor kleine getallen n is vooral het gedrag van deze functie rondom $x = 0$ van belang. In dat gebied is x^n voor kleine n namelijk relatief groot ten opzichte van grote n (bijvoorbeeld: $(0{,}1)^2$ is veel groter dan $(0{,}1)^{2026}$), en wordt de genererende functie dus grotendeels bepaald door de termen $d(n)x^n$ met kleine n. Concreet betekent dit dat we die waardes $d(n)$ kunnen bepalen door de eerste paar termen van het product uit te schrijven als een zogenaamde Taylorreeks en de coëfficiënt die x^n vermenigvuldigt af te lezen.

De bijdrage van grote getallen aan de genererende functie wordt daarentegen pas zichtbaar voor grotere waarden van x. Omdat de hierboven genoemde Taylorreeks alleen gebruikt mag worden voor $x<1$, is hun bijdrage het meest zichtbaar in de buurt van $x=1$. Hoe de genererende functie zich in dat gebied gedraagt, is minder eenvoudig te bepalen. Dit komt doordat heel veel van de factoren $(1-x^n)$ in de noemer daar heel klein worden, omdat x^n voor heel veel waarden van n in de buurt van 1 ligt, en de genererende functie dus gigantisch groot wordt.

Gelukkig is dit niet het einde van het verhaal. Het blijkt namelijk dat de generende functie Z heel nauw gerelateerd is aan de *Dedekind-etafunctie*, een wiskundige functie die vaak wordt aangeduid met de Griekse letter η ("eta"). Om precies te zijn:

$$Z(x) = \frac{x^{1/24}}{\eta(x)}$$

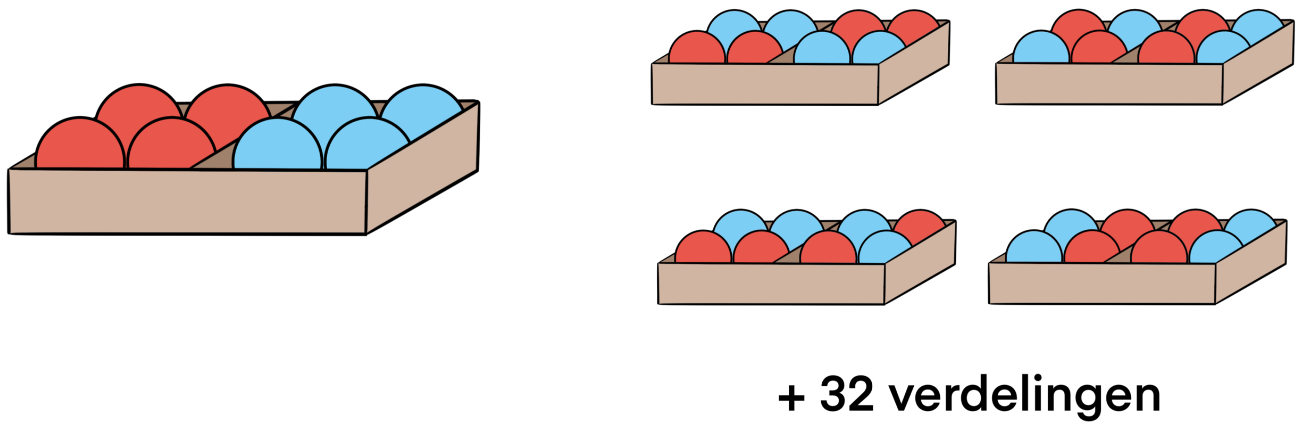
De Dedekind-etafunctie is een modulaire vorm, wat betekent dat de functie (nagenoeg) invariant is onder een grote familie van transformaties. We zagen hierboven al dat de genererende functie in de buurt van $x = 0$ veel beter te beschrijven is dan rond $x=1$. De transformatie-eigenschappen van de Dedekind-etafunctie kunnen we echter gebruiken om tóch het gedrag van de genererende functie in de buurt van $x = 1$ te beschrijven. Wie dit wiskundig netjes uitwerkt, vindt dat voor grote n geldt:

$$d(n) \approx \frac{1}{4n\sqrt{3}}e^{\pi \sqrt{\frac{2n}{3}}}$$

Dit resultaat – dat voor het eerst verkregen werd in 1918 door de wiskundigen Godfrey Hardy en Srinivasa Ramanujan – laat goed zien hoe snel het aantal mogelijke sommen groeit (vul maar eens wat waarden van n in!)

Microscopische toestanden tellen

Vergelijkbare telproblemen komen ook in de natuurkunde voor, bijvoorbeeld bij het bepalen van entropie. Zoals Marcel Vonk uitlegde in deze serie, is *entropie* een maat voor de hoeveelheid "microscopische toestanden" van een systeem die overeenkomen met één "macroscopische toestand" ervan. Een eenvoudig voorbeeld hiervan, dat in detail wordt uitgelegd in dit artikel, is het opbergen van ballen in een ballenbak. Neem een eenvoudige ballenbak met twee compartimenten en acht ballen: vier rode en vier blauwe. Een netjes gesorteerde verdeling – vier rode links, vier blauwe rechts – kan maar op één manier worden gemaakt. Een gemengde verdeling, met in elk compartiment twee rode en twee blauwe ballen (de macroscopische beschrijving van de toestand), kan daarentegen op maar liefst 36 manieren (de microscopische toestanden) ontstaan. De entropie van de gemengde verdeling is dus veel hoger dan die van de gesorteerde verdeling.



Verdelingen van ballen in een ballenbak. Er is slechts één configuratie met alle rode ballen links en alle blauwe ballen rechts (links), terwijl er 36 configuraties zijn met twee rode en twee blauwe ballen aan elke kant (rechts).

Voor een eenvoudig systeem zoals de ballenbak kunnen we expliciet alle microtoestanden tellen, maar voor veel natuurkundige systemen is dit praktisch onmogelijk. Denk bijvoorbeeld aan een gasfles gevuld met gas. Een realistische gasfles bevat zo'n 10^{23} atomen. Om de microscopische toestanden te beschrijven, zouden we voor elk atoom precies moeten aangeven waar het zich bevindt en hoe snel het beweegt. Het moge duidelijk zijn dat dit onbegonnen werk is.

Net als in het hierboven besproken telprobleem, kunnen we in zulke gevallen vaak gebruikmaken van een genererende functie. In deze genererende functie, die in deze context vaak de *partitiefunctie* wordt genoemd, worden de verschillende microtoestanden gegroepeerd op basis van hun energie. Dit is de energie van het gehele systeem – bijvoorbeeld al het gas in de gasfles – in een bepaalde microscopische configuratie. Net zoals een geheel getal op verschillende manieren geschreven kan worden als som van getallen, kan deze energie op (veel) verschillende manieren zijn opgebouwd uit de energie van de individuele deeltjes en hun onderlinge interacties. De partitiefunctie kan nu geschreven worden als

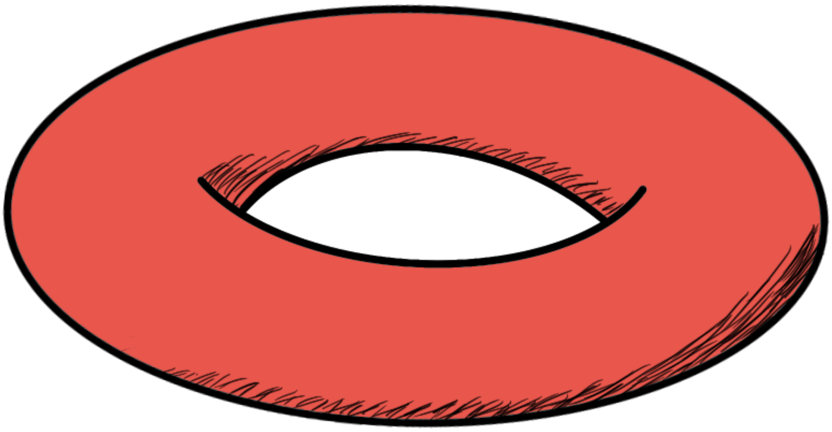
$$Z(T) = \sum_E d(E) e^{-E/(k_BT)}$$

Hierin is $d(E)$ het aantal configuraties met totale energie E. De variabele x is nu vervangen door e^{-1/k_BT}, met T de temperatuur en k_B de constante van

Boltzmann uit de thermodynamica. Vergelijkbaar met wat we in ons eerdere voorbeeld zagen, geldt hier: bij lage temperatuur leveren vooral toestanden met lage energie een bijdrage, bij hogere temperatuur worden ook toestanden met hogere energie belangrijk.

Natuurkunde op een torus

In sommige situaties blijkt de partitiefunctie bijzondere symmetrieën te hebben. Dat gebeurt bijvoorbeeld in conforme veldentheorieën: quantumveldentheorieën met een bepaalde hoge mate van symmetrie. Dankzij deze symmetrie kunnen fysische grootheden van de theorie herschreven worden naar grootheden die gedefinieerd zijn op een torus – het oppervlak dat de buitenkant vormt van een donut. Concreet betekent dit dat de grootheden invariant zijn onder verschuivingen in twee verschillende richtingen: rondom het “deeg” van de donut en rondom het gat in het midden. Zo’n torusbeschrijving van de theorie maakt het soms makkelijker om bepaalde berekeningen uit te voeren; niet in de laatste plaats doordat de torus als vanzelf modulaire symmetrie oplevert.



Een torus. Het oppervlak dat de buitenkant vormt van een donut.

In dit artikel legde ik uit dat een torus verkregen kan uit een rechthoek, namelijk door eerst de linker- en rechterzijde aan elkaar te plakken en vervolgens de boven- en onderkant. We hoeven voor deze procedure echter niet met een perfecte rechthoek te beginnen: ook uit een scheef parallellogram kunnen we een torus bouwen. De informatie over hoe “scheef” het parallellogram is, wordt opgeslagen in één complex getal \(\tau\), dat de verhouding en hoek tussen de twee verschillende zijden van het parallellogram bepaalt.

“Bouwpakket” van een torus. We kunnen een torus maken door te beginnen met een rechthoek, en beide paren van overstaande zijden aan elkaar te plakken (links). In plaats van een rechthoek, kunnen we ook beginnen met een scheef parallellogram (rechts).

In sommige gevallen geven twee verschillende parallellogrammen, na het aan elkaar plakken van de zijden, tóch dezelfde torus. Dit blijkt precies het geval te zijn als de complexe τ-parameters van de twee parallellogrammen aan elkaar gerelateerd zijn via een modulaire transformatie! In het bijzonder geven parallellogrammen met parameters τ en $-\frac{1}{\tau}$ dezelfde torus.

Nu komt de crux van het verhaal: als twee parallellogramparameters dezelfde torus beschrijven, moeten ze ook dezelfde natuurkunde opleveren. Een verandering van deze parameter verandert immers slechts de wiskundige beschrijving en niet de vorm van de torus – en dus ook niet de natuurkunde. Natuurkundige grootheden, zoals de partitiefunctie, moeten dus hetzelfde zijn in beide beschrijvingen. In het bijzonder moet de partitiefunctie dus voldoen aan

$$Z(\tau) = Z\left(-\frac{1}{\tau}\right)$$

Als τ klein is, is $\frac{1}{\tau}$ juist groot, en vice versa. (Kleine en grote τ komen overeen met $x=1$ en $x=0$ uit het vorige voorbeeld.) Voor de partitiefunctie maakt het door de modulaire symmetrie dus niet uit welk gebied we bekijken. Dat is erg handig, want zoals we hierboven al zagen, is het gedrag van de partitiefunctie in één van deze twee uiterste gebieden vaak relatief eenvoudig te beschrijven, doordat slechts een klein aantal toestanden een belangrijke bijdrage geven. Gebruikmakend van de modulaire symmetrie, kunnen we nu ook conclusies trekken over het andere uiterste waar juist heel veel toestanden bijdragen.

De Cardyformule

Met dit idee in het achterhoofd leidde John Cardy in de jaren tachtig een formule af die een benadering geeft voor het aantal microscopische toestanden in een conforme veldentheorie bij hoge energie. De precieze vorm van de formule hangt af van de theorie die we bestuderen, maar de algemene structuur lijkt sterkt op de formule van Hardy en Ramanujan voor gehele getallen.

Sinds zijn publicatie in 1986 groeide de *Cardyformule* uit tot een begrip in de hoge-energiefysica, en werd het artikel ruim 2500 keer geciteerd. Dat is niet zo gek, want conforme veldentheorieën spelen een centrale rol in de zoektocht naar een theorie van quantumzwaartekracht. Een belangrijk voorbeeld is de AdS/CFT-correspondentie, die een relatie geeft tussen conforme veldentheorieën (CFT) en theorieën van quantumzwaartekracht in een zogenaamde Anti-de Sitterruimte (AdS). Cardy's formule heeft het mogelijk gemaakt om het aantal toestanden in de CFT te vergelijken – en succesvol te matchen – met de entropie van zwarte gaten in het AdS-universum. Al met al vormt de formule dus een prachtig voorbeeld van de toepassingen van de abstracte wiskunde in de theoretische natuurkunde!