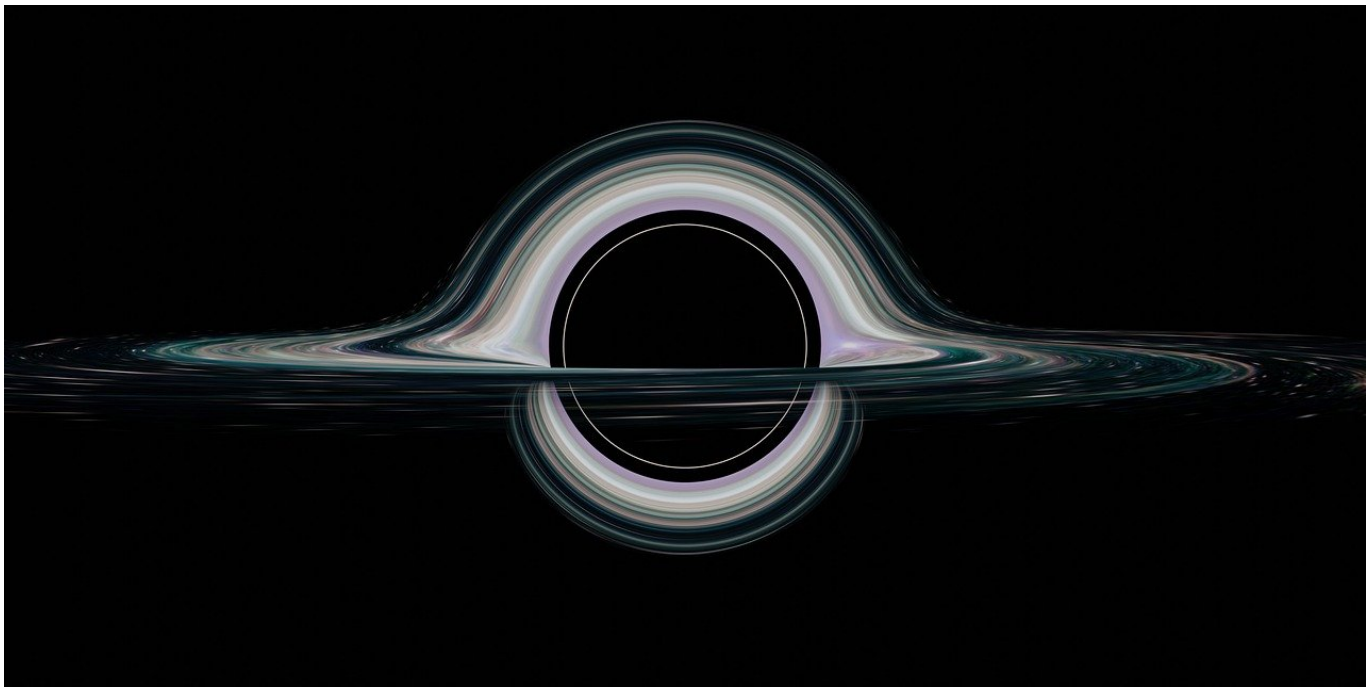
De Hawking-Pageovergang

Wat hebben zwarte gaten, donuts en een faseverandering met elkaar te maken? Het antwoord: alle drie zijn aspecten van de Hawking-Pageovergang. In dit artikel bespreek ik hoe het bestuderen van verschillende ‘gevulde donuts’ leidt tot een bijzonder natuurkundig fenomeen in de driedimensionale zwaartekracht: een faseverandering van een zwart gat naar een warm gas in negatief gekromde ruimtetijd.

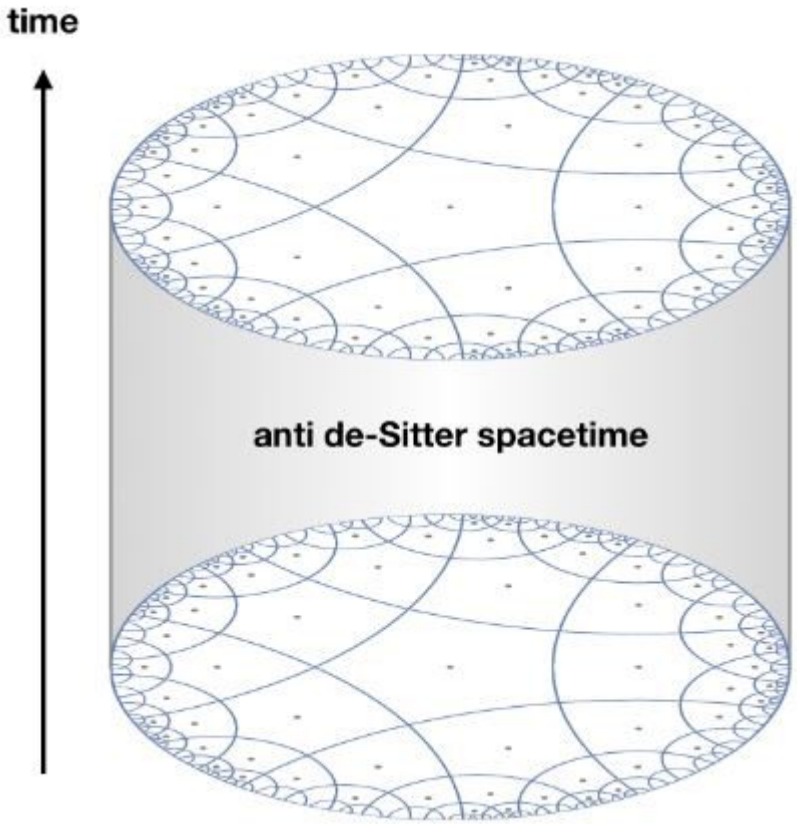


Afbeelding 1. Een zwart gat. Afbeelding: Alex Antropov.

Een zwart gat in drie dimensies

Een zwart gat is een plek in de ruimtetijd met zoveel massa dat zelfs licht er niet aan kan ontsnappen. Ons universum telt vier dimensies, waarvan er drie ruimtelijk zijn, en één de tijdsrichting voorstelt. Omdat de formules voor ons eigen universum lastig zijn om op te lossen, brengen natuurkundigen vaak versimpelingen aan. In dit artikel kijken we om deze reden naar zwarte gaten in een universum in drie dimensies, dus met twee ruimtelijke richtingen en één tijdsrichting. Daarnaast nemen we aan dat het een fictief universum betreft

dat negatief gekromd is, anders dan ons eigen heelal dat (enigszins) positief gekromd is. De technische term voor dit model is driedimensionale *Anti-de Sitterruimte*, afgekort AdS_3. De reden dat natuurkundigen precies deze versimpelingen aanbrengen, is dat we voor dit soort `modeluniversa' veel meer weten dan in andere situaties. Zo bestaat er de zogenaamde *AdS/CFT-correspondentie*, die een voorstel doet voor hoe we over de quantumtheorie van zwaartekracht moeten nadenken. Deze correspondentie stelt ons in staat om heel veel aspecten van de zwaartekracht, bijvoorbeeld de eigenschappen van een zwart gat, exact uit te rekenen.

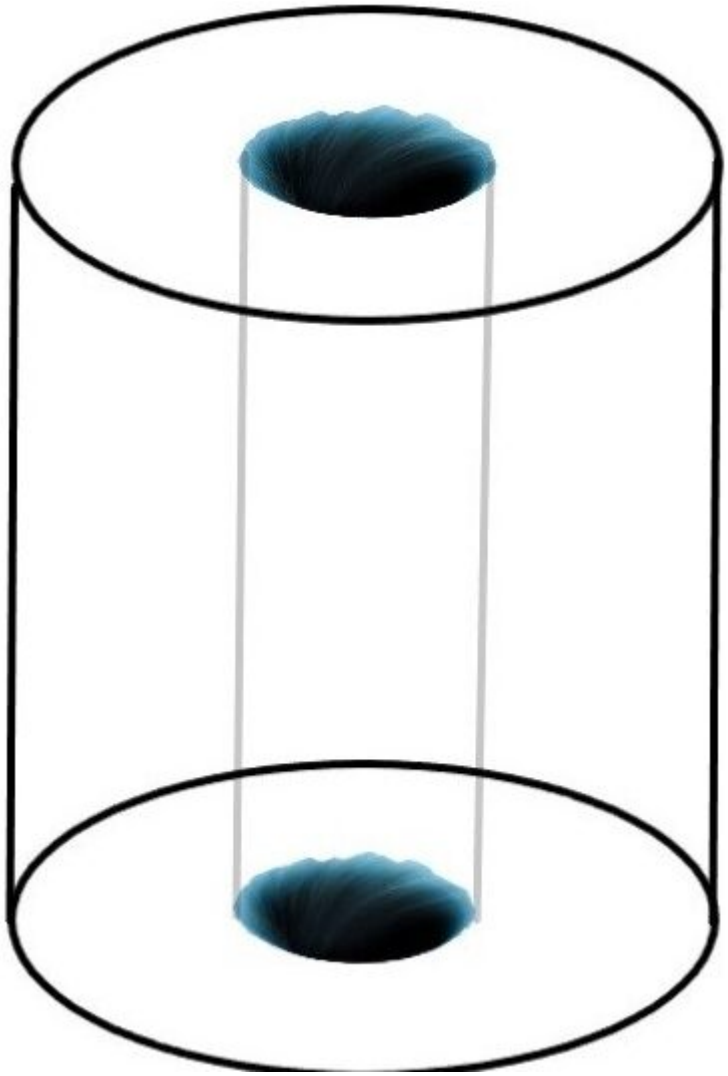


Afbeelding 2. Anti-de Sitter. Een voorstelling van Anti-de Sitterruimtetijd als een gevulde cilinder. De tijdsas loopt verticaal zodat het AdS-universum er op ieder tijdstip uitziet als een schijfje. Afbeelding: Han Yan.

Het driedimensionale AdS-universum kunnen we ons voorstellen als een gevulde cilinder (zie afbeelding 2). Hoe moeten we nadenken over zwarte gaten in dit heelal? In de gebruikelijke vier dimensies van ons eigen universum heeft de rand van een zwart gat de vorm van een bol. Om naar drie dimensies te gaan, moeten we die meetkunde als het ware platslaan: het zwarte gat heeft dan de vorm van een schijfje, met een cirkelvormige horizon als rand. Naast

die andere vorm, is er in driedimensionale zwaartekracht nog iets vreemds aan de hand. Waar het in ons eigen heelal mogelijk is om in een zwart gat te vallen – de horizon ziet er van dichtbij niet anders uit dan `lege' ruimtetijd – is dat voor een zwart gat in drie dimensies niet mogelijk: daar is een zwart gat daadwerkelijk een gat in de ruimtetijd! We kunnen ons AdS_3 met een zwart gat erin dus voorstellen als een gevulde cilinder, waar een kleinere cilinder uit is weggehaald. In afbeelding 3 is dit zogenaamde *BTZ-zwarte gat* weergeven. Het is vernoemd naar de natuurkundigen Bañados, Teitelboim en Zanelli die de meetkunde van dit zwarte gat voor het eerst onderzochten.

Een van de belangrijkste ontdekkingen in de studie van zwarte gaten vond plaats in de jaren 70, toen Stephen Hawking liet zien dat zulke objecten niet helemaal zwart zijn, maar eigenlijk heel donkergrijs. Zwarte gaten bleken – tegen alle verwachtingen van die tijd in – namelijk licht uit te zenden, de zogenaamde *Hawkingstraling*. Dit is een effect dat voortkomt uit de quantummechanische eigenschappen van het zwarte gat, en maakt dat het niet *volledig* zwart is. Ook zorgt de Hawkingstraling ervoor dat we over het zwarte gat kunnen nadenken als een thermodynamisch object. (Thermodynamica is een ander woord voor warmteleer, en gaat onder andere over natuurkundige objecten die straling uitzenden.) We kunnen daarom bijvoorbeeld spreken over de temperatuur van het zwarte gat, alsof het een `gewoon' gloeiend object is. We kunnen daarnaast aan een zwart gat ook andere thermodynamische begrippen zoals *entropie* en *vrije energie* toekennen – zie bijvoorbeeld dit artikel.

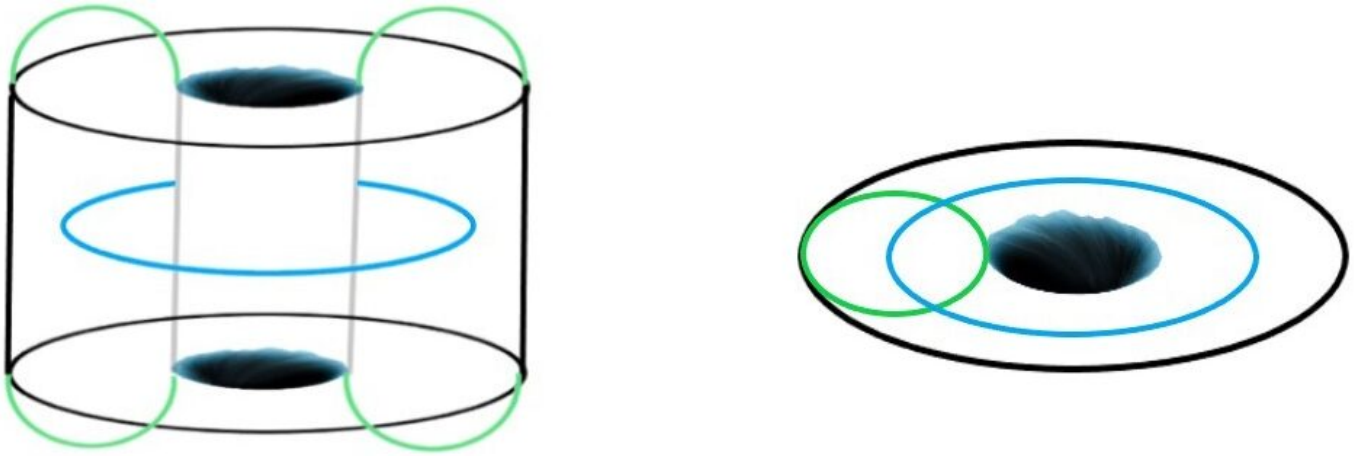


Afbeelding 3. Het BTZ-zwarte gat in een Anti-de Sitterruimtetijd. We kunnen de meetkunde zien als een cilinder, waar een kleinere cilinder uit is verwijderd – hier voorgesteld door twee verbonden zwarte schijfjes aan de uiteinden. Het is in drie dimensies dus niet mogelijk om het zwarte gat `in te vallen': het is daadwerkelijk een gat in de ruimtetijd!

Hoe vul je een donut?

Laten we nu teruggaan naar ons driedimensionale voorbeeld in afbeelding 3. Hoe kunnen we de thermodynamische eigenschappen, bijvoorbeeld de entropie, van zo'n zwart gat uitrekenen? Er is een wiskundige truc om dit doen, die op het eerste gezicht wat vreemd aandoet: we maken van het plaatje in afbeelding 3 een *donut* door de verticale tijdsrichting

nu in een cirkel te laten gaan. De procedure is het beste met een plaatje uit leggen: in afbeelding 4 is weergeven hoe je uit de ruimtetijd met een zwart gat een donut kunt maken door de tijdsrichting in een rondje te laten gaan. Wat heeft deze `donut' te maken met het zwarte gat waar we oorspronkelijk mee begonnen? Verrassend genoeg blijken bepaalde eigenschappen van de donut – denk bijvoorbeeld aan het volume – direct te relateren aan thermodynamische eigenschappen van het zwarte gat waar we mee begonnen. Dit wonderlijke resultaat stelt ons in staat om ingewikkelde natuurkundige grootheden te halen uit een betrekkelijk eenvoudig meetkundig plaatje.

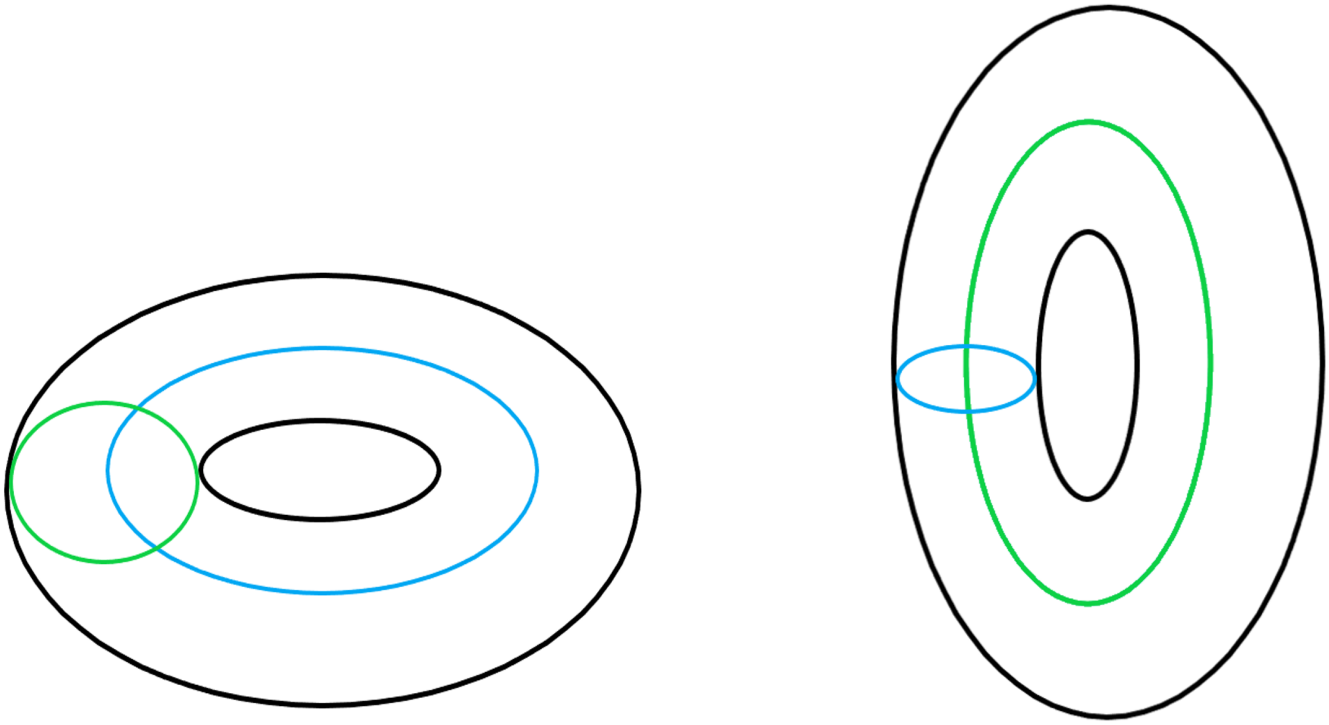


Afbeelding 4. Hoe maak je uit een ruimtetijd met zwart gat een donut? Beginnend met de BTZ-cilinder (links), plaatsen we halve groene cirkels die de rand van de cilinder met de horizon van het zwarte gat verbinden. Door nu de boven- en onderkant van de cilinder naar elkaar toe te duwen komen de halve cirkels samen en vormen ze een volledige cirkel. De tijd loopt nu niet langer verticaal, maar in een rondje, namelijk in de richting van de groene cirkel. Het resultaat is een gevulde donut (rechts) met twee gesloten lussen.

We kunnen het BTZ-zwarte gat in drie dimensies nu zien als een gevulde donut. Het blijkt echter dat de gevulde donut die overeenkomt met het BTZ-zwarte gat niet de enige donut is die je wiskundig gezien kunt maken. Om dit in te zien moeten we naar de rand van de donut kijken – dat wil zeggen: de donut zonder de vulling. Op dit oppervlak kun je twee soorten gesloten lussen tekenen, die we in afbeelding 4 met groen en blauw hebben weergegeven. Als we dit plaatje vergelijken met afbeelding 3 zien we dat die twee lussen een verschillende interpretatie hebben: de ene (blauw) correspondeert met een ruimtelijke richting en de andere (groen) met de tijdsrichting. Als we de vulling weer toevoegen, hebben beide lussen ook verschillende eigenschappen. De tijdslus kan dan namelijk worden samengetrokken tot

een punt in het inwendige, maar de ruimtelus niet. Het feit dat een lus in de ruimtelijke richting niet *samentrekbaar* is betekent precies dat er een ‘gat’ in de ruimte zit, en dat we daarom te maken hebben met een zwart gat!

Het voorgaande voorbeeld laat zien hoe we over de ‘vulling van een donut’ (denk hierbij dus *niet* aan jam of chocolade) kunnen nadenken. De manier om een donutrand op te vullen wordt bepaald door welke lus je samentrekbaar maakt. Het is nu niet moeilijk om andere donuts te maken. Zo kunnen we bijvoorbeeld beide lussen van rol laten wisselen. Met andere woorden: we maken de ruimtelijke lus samentrekbaar, en de tijdslus juist niet. In het driedimensionale plaatje is die procedure je moeilijk voor te stellen, maar het eindresultaat kun je juist heel makkelijk tekenen: in afbeelding 5 is deze nieuwe donut weergeven. Hoe kunnen we dit nieuwe plaatje natuurkundig interpreteren? We hebben gezien dat de BTZ-donut (waarbij de tijdslus samentrekbaar is) ons iets vertelt over de eigenschappen van een zwart gat in de ruimtetijd. Kunnen we iets soortgelijks zeggen over de andere donut? Dat daar de ruimtelijke lus samentrekbaar wordt, betekent in feite dat er geen zwart gat meer is: we hebben hierbij gewoon te maken hebben met `lege’ AdS_3-ruimtetijd. De groene tijdslus die in een rondje gaat, heeft – net als bij het BTZ zwarte gat – te maken met de truc om thermodynamische eigenschappen te berekenen: we bestuderen hier AdS_3 (zonder zwart gat!) van een bepaalde temperatuur. Preciezer: het blijkt dat dit plaatje een verder lege ruimte met een warm gas beschrijft, en om die reden wordt het ook wel aangeduid met *thermische AdS_3*.



Afbeelding 5. Twee verschillende donuts. Links: de BTZ donut, waarvan de tijdslus (groen) samentrekbaar is, en de ruimtelijke lus (blauw) – rondom het zwarte gat – niet. Rechts: een donut, waarbij de groene en blauwe lus van rol zijn gewisseld.

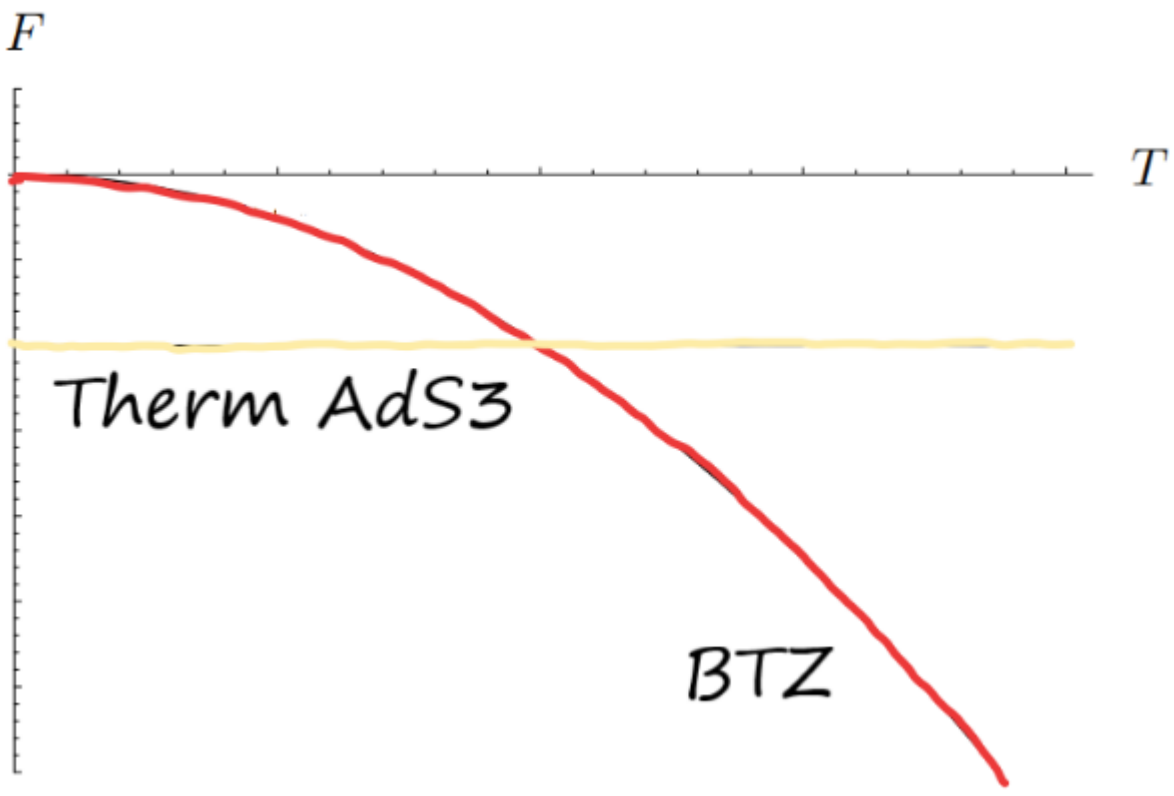
De Hawking-Pageovergang

We hebben gezien hoe twee verschillende donuts overeenkomen met twee verschillende natuurkundige objecten: de ene met een zwart gat, de andere met een warm gas in `lege' ruimtetijd met een bepaalde temperatuur. Wat hebben beide situaties met elkaar te maken? Zoals al eerder genoemd kunnen we uit de eigenschappen van de donut iets leren over de thermodynamische eigenschappen van het systeem. Een belangrijke grootheid in deze context is de *vrije energie*. De vrije energie vertelt je hoe voordelig het is voor een systeem om in een bepaalde toestand te zijn bij een gegeven temperatuur. Kort gezegd, wordt de voorkeur gegeven aan de toestand met de laagste vrije energie.

Dit leidt tot het verschijnsel van *faseveranderingen*. Een bekend voorbeeld van een faseverandering is het smelten van ijs. Het gaat hierbij om twee toestanden van water, namelijk vast en vloeibaar. Onder het vriespunt is de vaste toestand voordeliger – en dus: de vrije energie van de toestand lager – maar zodra we de temperatuur boven het vriespunt brengen geldt juist dat de vloeibare toestand de voordeligste is. Het gevolg is een faseovergang: een drastische verandering van het hele systeem waarbij de toestand van vast

naar vloeibaar verandert. Dit fenomeen kennen we als het smelten van ijs.

Wat betekenen deze faseveranderingen voor onze situatie? Grofweg komt de vrije energie overeen met het volume[1] van de gevulde donut. In afbeelding 6 is een grafiek van de vrije energie van beide donuts weergeven, als een functie van de temperatuur. In de afbeelding is te zien dat voor lage temperaturen (links in de grafiek) thermische AdS_3 een lagere vrije energie heeft dan het BTZ-zwarte gat. Voor hoge temperaturen is de situatie omgekeerd. Dat betekent dat er dus ergens een overgangspunt zit, waar het systeem van 'fase' verandert. Deze faseovergang werd als eerste beschreven door Stephen Hawking – dezelfde als van de straling – en Don Page, en wordt daarom ook wel de *Hawking-Pageovergang* genoemd[2]. Beginnend met een thermisch gas in het AdS_3-universum bij een bepaalde temperatuur, komen we door de temperatuur te verhogen een dramatische overgang tegen, waarbij opeens een BTZ-zwart gat ontstaat.



Afbeelding 6. De Hawking-Pageovergang. Een grafiek van de vrije energie F als een functie van de temperatuur T voor thermische AdS3 (geel) en het BTZ-zwarte gat (rood).

Samenvattend hebben we door twee verschillende donutvormen met elkaar te vergelijken

een heel interessant natuurkundig verschijnsel ontdekt: een faseovergang tussen een zwart gat en een gas in lege ruimte. Deze zogeheten Hawking-Pageovergang is een voorbeeld van de manier waarop verschijnselen uit de `klassieke' thermodynamica kunnen worden toegepast binnen een theorie van quantumzwaartekracht. Naast de vrije energie zijn er overigens nog veel andere thermodynamische grootheden, bijvoorbeeld de entropie – waarvan de interpretatie nog steeds een groot raadsel is – die vanuit het donutplaatje kunnen worden berekend.

Hopelijk heeft deze bijzondere faseovergang je warm gemaakt voor een verdere verdieping in de mysterieuze thermodynamica van zwarte gaten!

In de zomerperiode publiceert de QU-site elke vrijdag een artikel. In september gaan we weer terug naar het schema van twee artikelen per week: elke dinsdag en elke vrijdag.

---

[1] Om precies te zijn is de vrije energie F gerelateerd aan de *actie* van de donut, I(donut), volgens de formule F = 1/T × I(donut). De actie van de donut is niet precies het volume, maar een nauw verwante op meetkundige informatie gebaseerde grootheid.

[2] Hawking en Page beschreven de faseverandering zelf voor een zwart gat in *vierdimensionale* Anti-de Sitterruimte. De situatie in drie dimensies is echter iets makkelijker in meetkundige plaatjes te vatten, en om deze reden in dit artikel gebruikt.