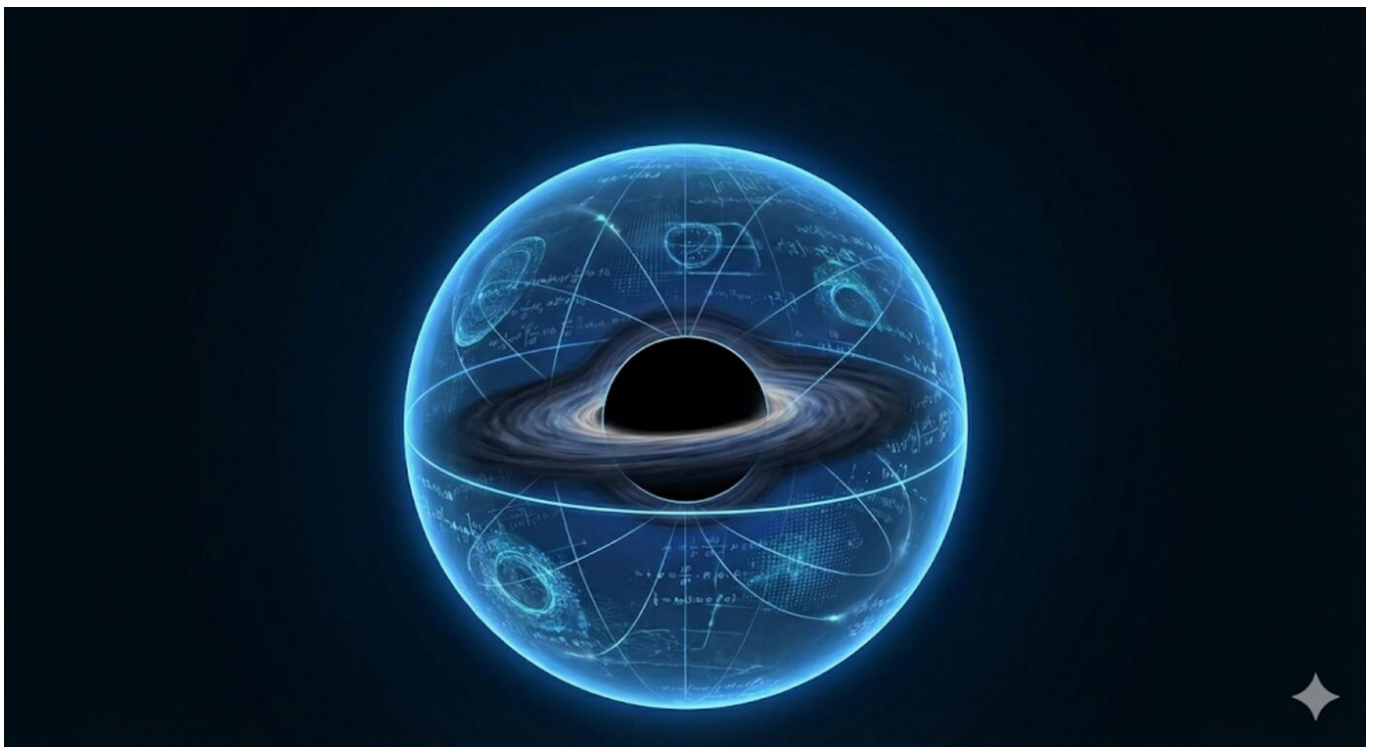


Druk en volume van een zwart gat

Zwarte gaten komen veelvuldig aan bod op de Quantum Universe-website: de zoekterm '[zwart gat](#)' levert maar liefst 324 resultaten op! Er is zelfs een [hele serie](#) artikelen aan zwarte gaten gewijd. Een aanzienlijk deel van deze interesse komt voort uit het feit dat zwarte gaten [thermodynamisch](#) zijn: ze hebben een energie, temperatuur en [entropie](#). Normaal gesproken hebben thermodynamische systemen daarnaast ook nog een druk en volume. Dit leidt tot de vraag: wat zijn nu eigenlijk de druk en het volume van een zwart gat? Het antwoord blijkt nog niet zo eenvoudig...



Thermodynamica van zwarte gaten

Het is handig om eerst de gelijkenissen tussen de warmteleer (de goede, Nederlandse naam van de thermodynamica) en de eigenschappen van zwarte gaten voor de geest te halen. Er bestaan grofweg vijf thermodynamische hoofdwetten, respectievelijk de min-eerste, nulde,

eerste, tweede en derde genaamd. Deze vreemde becijfering heeft te maken met de geschiedenis van de ontdekkingen van deze hoofdwetten.

De **min-eerste hoofdwet** (in [2001 geformuleerd](#) door Harvey Brown en de Utrechtse thermodynamicalegende Jos Uffink) stelt dat een thermodynamisch systeem uit zichzelf “equilibreert” – dat wil zeggen: dat het uit zichzelf naar een evenwichtstoestand neigt wanneer het met rust wordt gelaten.

De **nulde hoofdwet** stelt vervolgens dat als systeem A in thermodynamisch evenwicht met systeem B is, en systeem B weer in evenwicht met systeem C, dat A en C dan ook met elkaar in evenwicht zijn. Dit maakt het mogelijk om temperatuur te definiëren als een grootte die aangeeft dat twee systemen met elkaar in evenwicht zijn als hun temperaturen gelijk zijn.

De **eerste hoofdwet** is op zijn beurt een vorm van behoud van energie, en wordt doorgaans geschreven als

$$\Delta E = T \Delta S - P \Delta V,$$

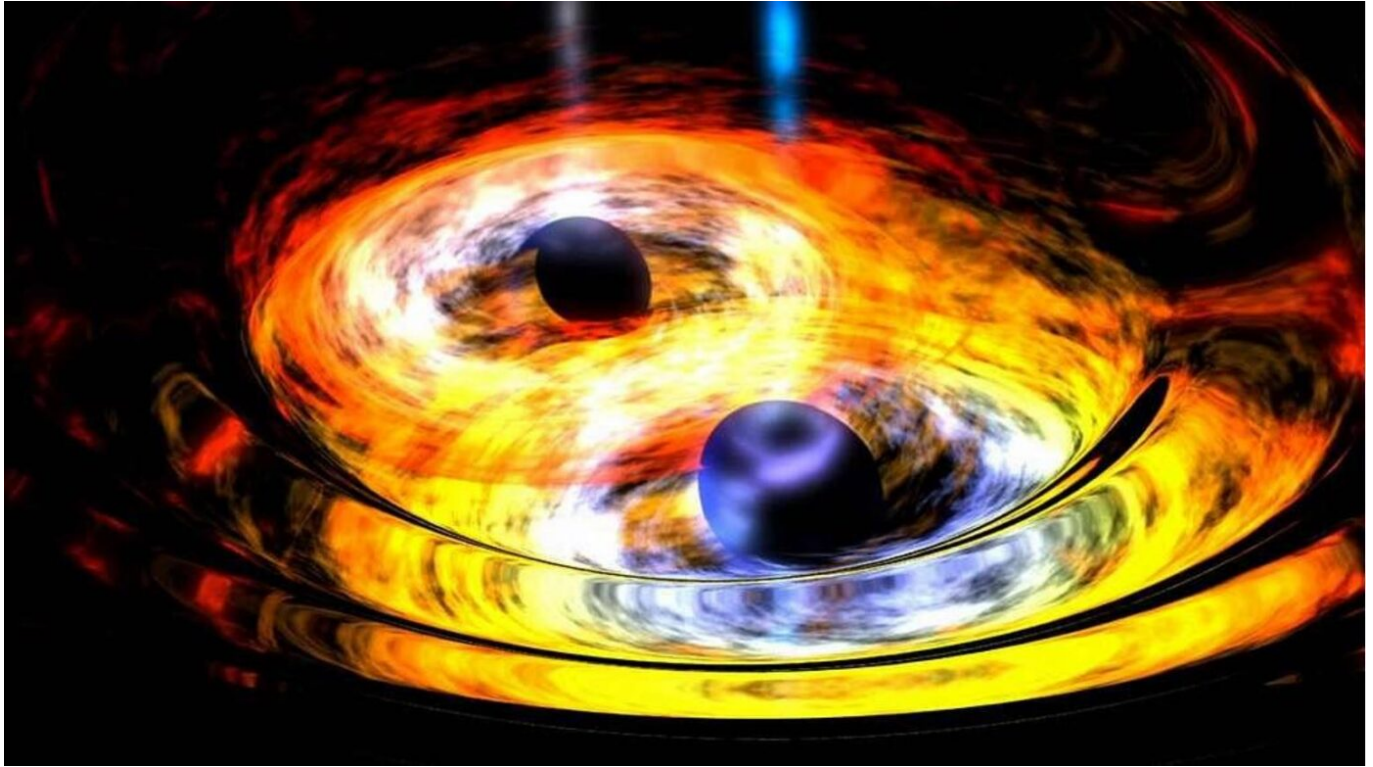
waar E voor energie, T voor temperatuur, S voor entropie, P voor druk en V voor volume staat. De Δ geeft aan dat het om veranderingen gaat: de eerste wet beschrijft dus een verband tussen de veranderingen in energie, entropie en volume van een systeem.

De **tweede hoofdwet** is misschien wel de bekendste van allemaal: die vertelt ons dat entropie nooit kan afnemen.

Als laatste is de **derde hoofdwet** een beetje lastig: die zegt grofweg dat het absolute nulpunt van de temperatuurschaal nooit door een eindig aantal thermodynamische handelingen kan worden bereikt.

De thermodynamica van zwarte gaten komt neer op een aantal overeenkomsten tussen de vijf bovengenoemde hoofdwetten en stellingen die het gedrag van zwarte gaten beschrijven. Een evenwichtstoestand van een zwart gat wordt beschreven door een zeer klein aantal grootheden, namelijk de massa M , het impulsmoment J en lading Q – dit feit is zelfs een wiskundige stelling en wordt het [no-hair theorem](#) genoemd. Als nu een zwart gat een beetje verstoord wordt, dan equilibreert het zeer snel weer terug naar zo’n toestand die door drie parameters wordt beschreven. Ook als twee zwarte gaten botsen en versmelten duurt het

maar heel even voordat het nieuwe, gecombineerde zwarte gat door het uitzenden van zwaartekrachtsgolven terugkomt bij zo'n evenwichtstoestand. Dit is dus analoog aan de minste wet van de warmteleer.



Afbeelding 1. Twee versmeltende zwarte gaten. Bron: [NASA](#).

De nulde wet van de thermodynamica van zwarte gaten is het feit dat de *oppervlaktezwaartekracht*, dus de sterkte van het zwaartekrachtsveld aan de horizon van het zwarte gat, constant is langs die gehele horizon. Omdat de oppervlaktezwaartekracht evenredig is aan de hawkingtemperatuur van een zwart gat, maakt deze nulde wet het mogelijk om een coherente en globale temperatuur voor een zwart gat te definiëren.

Als we nu even aannemen dat we een zwart gat bekijken dat niet ronddraait en niet geladen is, dan is de eerste hoofdwet voor zwarte gaten heel eenvoudig:

$$\delta M = T_H \delta A / 4$$

Hier staan M , T_H en A voor massa, hawkingtemperatuur en *area*, dus oppervlakte van de [horizon](#). Als we nu meenemen dat massa volgens Einsteins $E=mc^2$ een vorm is van energie, en dat $A/4$ gelijk is aan de entropie (dit laatste werd [door Bekenstein en Hawking aangetoond](#)), dan zien we dat de eerste hoofdwet voor zwarte gaten hetzelfde is als de

eerdergenoemde eerste hoofdwet voor algemene thermodynamische systemen. Althans, het begin is hetzelfde, maar het zal de oplettende lezer meteen opvallen dat druk en volume ontbreken in de eerste hoofdwet voor zwarte gaten! Hier kom ik zo dadelijk op terug.

Eerst noem ik nog even dat de tweede hoofdwet voor zwarte gaten bestaat uit een stelling van Hawking en anderen die bewijst dat het oppervlakte van de horizons van zwarte gaten nooit kan afnemen. Als twee zwarte gaten versmelten tot een nieuw zwart gat, dan moet de nieuwe horizon een groter oppervlak hebben dan de som van de oppervlakten van de horizons van de oude zwarte gaten. Recent was er overigens een meting in het nieuws die voor één specifieke samensmelting van zwarte gaten liet zien dat daar inderdaad [aan Hawkings wet voldaan is](#). Omdat we horizonoppervlak met entropie identificeren, komt deze stelling neer op een tweede hoofdwet.

Ook de derde hoofdwet, ten slotte, heeft een versie voor zwarte gaten, al moet je daarbij wel [naar roterende zwarte gaten kijken](#).

Eerdere voorstellen voor druk en volume

Zoals hierboven werd aangekaart ontbreken druk en volume in de eerste hoofdwet voor zwarte gaten. Dit is een probleem, want het maakt de analogie tussen de warmteleer en zwarte gaten onzuiver; een “echt” thermodynamisch systeem heeft nu eenmaal een druk en een volume. Het is wel zo dat *roterende* zwarte gaten nog een extra term in hun eerste hoofdwet krijgen die erg op de benodigde druk-volumeterm lijkt, maar die term beschrijft in feite het impulsmoment en niet een echte druk. Een normaal thermodynamisch systeem kan ook ronddraaien en daardoor een impulsmoment krijgen, en die term staat dan los van de druk-volumeterm. Op zo’n zelfde manier heeft een *geladen* zwart gat nog een extra term in de eerste hoofdwet, maar ook dat is geen echte druk-volumeterm.

Om dit gebrek te verhelpen zijn er verschillende voorstellen gedaan in de afgelopen decennia, maar daarvan zijn er eigenlijk maar twee echt bedoeld geweest om een druk-volumeterm in de eerste hoofdwet te verschaffen. Het eerste voorstel werd gedaan door Thanu Padmanabhan, en het tweede staat bekend als de *scheikunde der zwarte gaten* (black hole chemistry) of *uitgebreide warmteleer der zwarte gaten* (extended black hole thermodynamics). We zullen ze nu allebei langslopen, waarbij hun gebreken aan het licht komen.

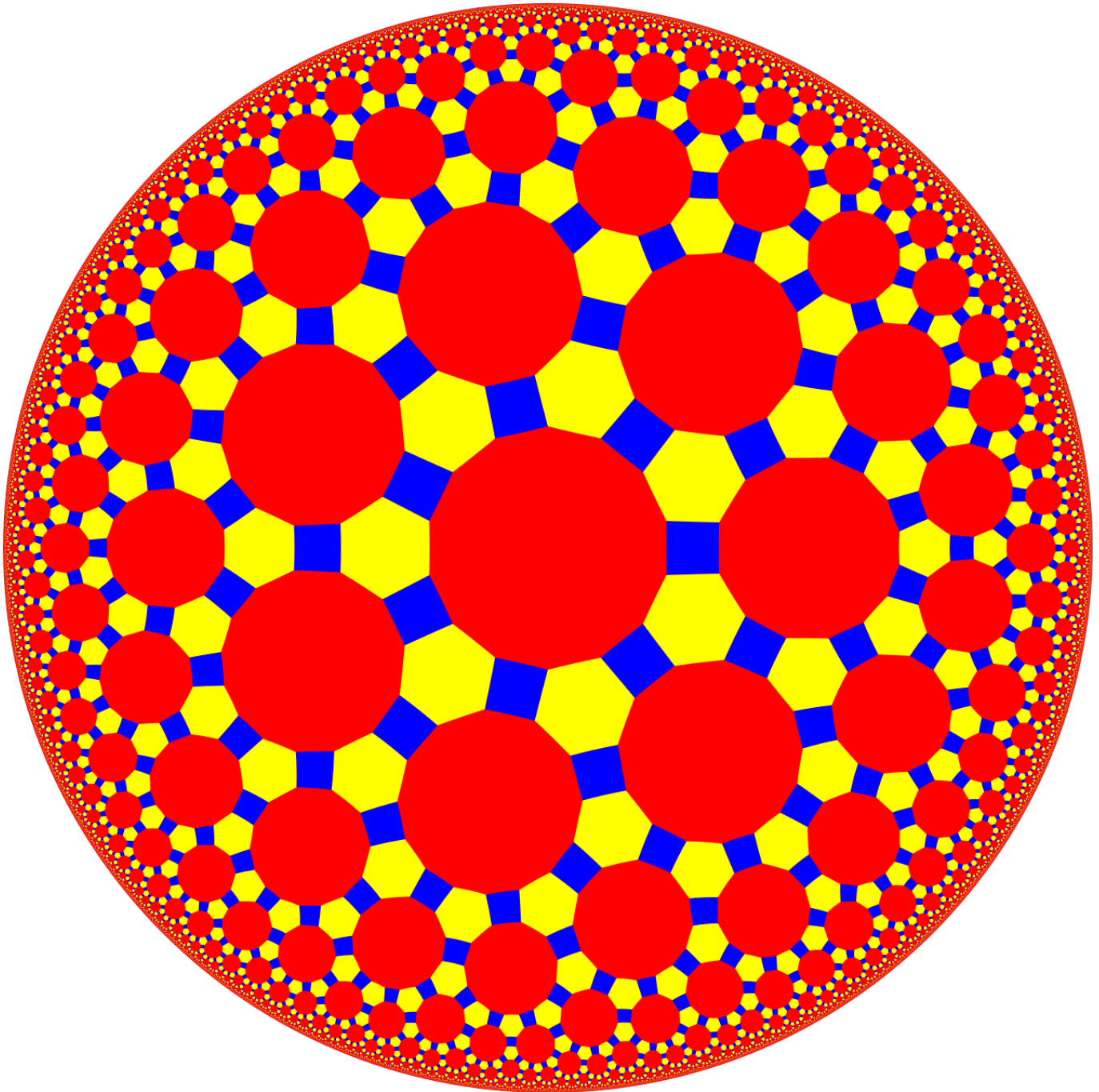
Padmanabhans voorstel komt erop neer dat je het naïeve, meetkundige volume van een zwart gat als volume in de thermodynamicawetten gebruikt. Als de horizon dus een straal r heeft, dan gebruik je gewoon het volume van een bol met die straal: $(V = \frac{4}{3} \pi r^3)$. Het oppervlak van diezelfde bol is $(A = 4 \pi r^2)$, dus dit geeft een entropie $(S = A/4 = \pi r^2)$. Op het eerste gezicht lijkt het logisch om het standaardvolume te gebruiken, maar hier kleven twee onoverkomelijke problemen aan. Allereerst bestaat het volume van de binnenkant van een zwart gat helemaal niet. In het midden van een zwart gat zit een singulariteit, en die heeft een ongedefinieerd volume, wat het volume tussen de singulariteit en de horizon in feite oneindig maakt. Het naïeve volume $(\frac{4}{3} \pi r^3)$ is dus helemaal niet het daadwerkelijke volume van een zwart gat. Ten tweede zijn volume en entropie volgens bovenstaande definities niet onafhankelijk – ze hangen namelijk beide af van de horizonstraal r . Dit is problematisch, want in de thermodynamica zijn volume en entropie wel onafhankelijk. Padmanabhans voorstel werkt dus niet.

Ook de scheikunde der zwarte gaten is problematisch. In dat voorstel wordt de [kosmologische constante](#) (Λ) gebruikt als thermodynamische druk. Dit werkt echter alleen in een ruimte met negatieve (Λ) , de zogenaamde *Anti-de Sitterruimte*. Het bijbehorende volume wordt dan in zekere zin gedefinieerd als het verschil tussen het volume van zo'n ruimte mét een zwart gat erin en zo'n ruimte zonder een zwart gat erin. Op zich lijkt dit best een geschikt voorstel. Het is dan ook in honderden artikelen gebruikt om allerlei berekeningen te doen. Maar toch berust het voorstel op een fundamenteel misverstand: de kosmologische constante is namelijk geen thermodynamische grootheid, maar een theorieparameter – niet iets wat je zomaar kan variëren, dus. Het is daarom eigenlijk volkomen onzinnig om (Λ) als een druk te interpreteren, tenzij je naar een soort hogere ruimte van verschillende theorieën kijkt.

Een holografisch voorstel

Hoe moeten we druk en volume van een zwart gat dan wél definiëren? Om het antwoord te begrijpen moeten we teruggaan naar de diepste grondslagen van ons begrip van de zwaartekracht. We begrijpen zwaartekracht dankzij Einsteins algemene relativiteitstheorie als [kromming van ruimte en tijd](#). Maar sinds het werk van [Gerard 't Hooft](#) weten we ook dat er iets heel vreemd aan de hand is met die beschrijving: alle informatie over een gebiedje ruimtetijd valt namelijk te beschrijven op de *rand* van dat gebiedje. Dit idee staat bekend als

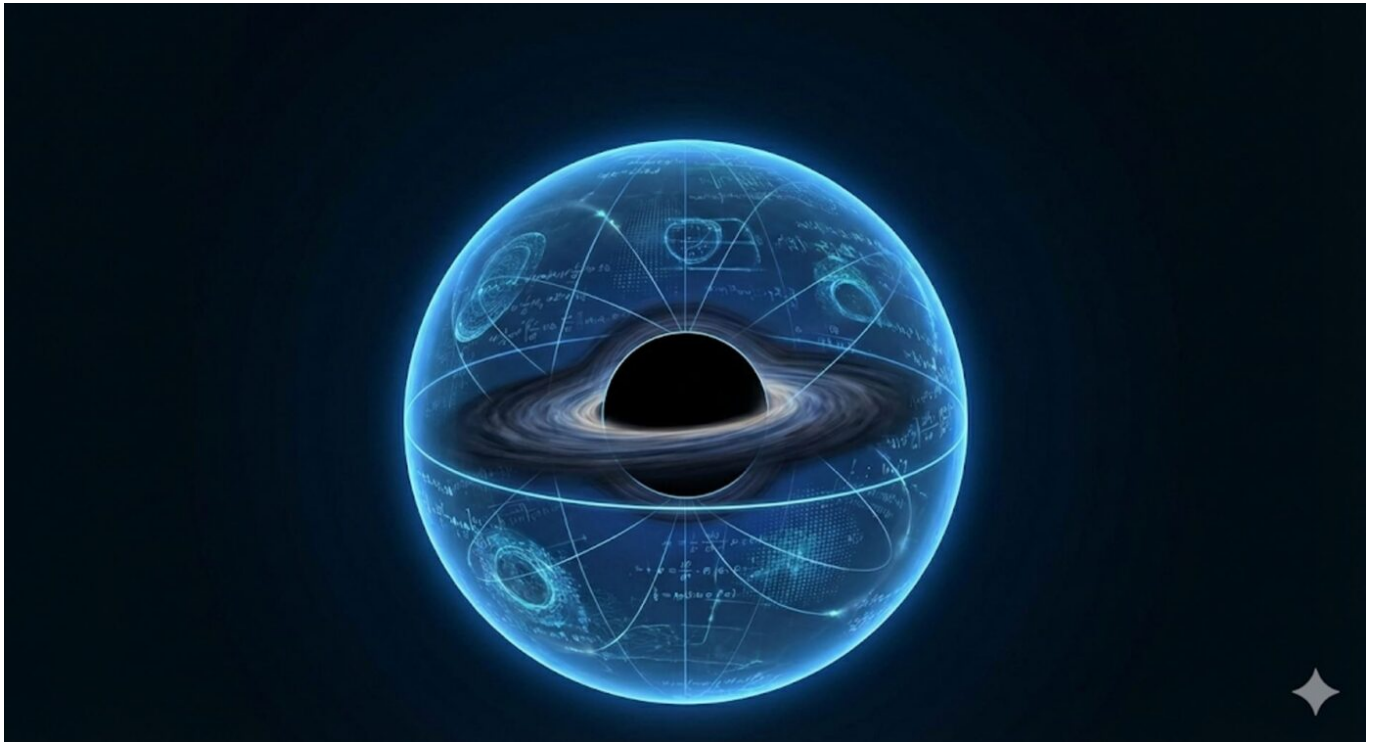
het *holografisch principe* (als Nederlandse benaming zou ik '*schichtbeeldbeginsel*' willen voorstellen): zie bijvoorbeeld [dit artikel](#) voor een uitleg. De gekromde ruimtetijd fungeert dus als een soort hologram, in de zin dat een schijnbaar vierdimensionale ruimtetijd eigenlijk een driedimensionale beschrijving geniet. De bekendste uitwerking van het holografisch principe wordt gegeven door de correspondentie tussen Anti-de Sitterruimtetijd en de *hoekgetrouwe* of *conforme veldentheorie*, afgekort als AdS/CFT. Deze overeenkomst geeft een beschrijving van de zwaartekracht in de AdS-ruimte in termen van een conforme veldentheorie op de rand van die ruimte. Dit idee kan je dus ook gebruiken om een beschrijving te geven van zwarte gaten in de AdS-ruimte. En wat blijkt: een zwart gat in AdS wordt beschreven door een *thermodynamische* toestand op de conforme rand!



Afbeelding 2. De conforme rand van AdS wordt vaak voorgesteld aan de hand van de schijf van Poincaré. Bron: Parcly Taxel, via [Wikimedia Commons](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Poincar%C3%A9_disk_model_of_AdS_2D.jpg).

Normaal gesproken bevindt die rand van de AdS-ruimte zich “oneindig ver weg”, als een soort vluchtpunt in een perspectieftekening. Maar het is ook mogelijk om de rand op een eindige afstand van het zwarte gat te plaatsen. Dan stop je het zwarte gat dus eigenlijk in een bolvormige doos. James York had dit in de jaren tachtig al bestudeerd voor het simpelste geval, waarin $\Lambda = 0$, en daarbij ontdekte hij dat er dan een druk bestaat op die doos. Het bijbehorende volume wordt gegeven door het oppervlak van de doos. Dit voorstel

was naderhand een beetje in de vergetelheid geraakt, maar vanuit een modern, holografisch oogpunt is het eigenlijk heel logisch: de entropie schaalt met het oppervlak van de horizon, en dus zou het “volume” eigenlijk ook een oppervlak moeten zijn! Dit is precies waar York op uitkwam, maar omdat het holografisch principe toen nog niet goed ontwikkeld was kon hij geen goede interpretatie van zijn werk geven en bleef het invoeren van een bolvormige doos een beetje ad hoc. Achteraf gezien was het idee echter precies juist.



Afbeelding 3. Voorstelling van de bolvormige doos rond een zwart gat. Bron: Gemini.

In een recent [artikel](#) samen met mijn begeleider Manus Visser (die ooit ook al [voor QU schreef](#)) beargumenteren we dan ook dat Yorks voorstel de werkelijke, holografische druk en volume van een zwart gat geeft. We verbreden het idee tot de Anti-de Sitterruimte, waardoor we in de limiet waarin de doos oneindig groot wordt kunnen laten zien dat we de welbekende conforme veldentheorie terugkrijgen. Ook bestuderen we daarbij de vraag of een zwart gat in een doos een *extensief* thermodynamisch systeem is. Extensiviteit betekent dat de entropie en energie van een systeem evenredig schalen met de grootte van dat systeem. Die grootte wordt gewoonlijk gekarakteriseerd aan de hand van het volume. Als je het systeem dus twee keer zo veel volume geeft, dan moeten de entropie en de energie ook twee keer zo groot worden. Nu we een werkende definitie van volume voor een zwart gat hebben als *oppervlak* van een York-doos, kunnen we uitrekenen of zwarte gaten extensieve thermodynamische

systemen zijn. Dat blijkt alleen het geval te zijn in bepaalde limieten, wat weer iets interessants zegt over de onderliggende vrijheidsgraden van de [quantumzwaartekracht](#) – namelijk dat de onderliggende theorie niet-lokaal moet zijn: wat op een bepaalde plek gebeurt hoeft niet alleen af te hangen van wat daar vlakbij gebeurt.

Al met al zijn de vragen omtrent druk en volume van zwarte gaten hier bepaald niet mee afgedaan! Ons voorstel opent juist allerlei nieuwe wegen. Zo kunnen we de druk en het volume gebruiken om theoretische warmtemotoren te maken, die bijvoorbeeld de [carnotcyclus](#) volgen. Ook moeten we nog allerlei dingen uitrekenen, zoals toestandsvergelijkingen of [faseovergangen](#) voor geladen zwarte gaten, en is het nog niet helemaal duidelijk hoe het formalisme werkt voor roterende zwarte gaten. Nog genoeg te doen dus!