Een quantum-ommetje

We hebben allemaal wel eens ervaren dat een ommetje veel invloed kan hebben op je gemoedstoestand – zeker in de huidige coronaperiode. Je voelt je bij terugkomst misschien een stuk opgewekter dan toen je van huis ging. Iets soortgelijks komt voor in de natuurkunde! Daar kunnen quantumdeeltjes ook 'ommetjes' maken, waarna ze bij terugkomst een mysterieuze fase hebben opgepakt. In dit artikel zal ik deze 'geometrische fasen' bespreken aan de hand van een interessant raadsel over een jager, een beer en de richting van een jachtgeweer.



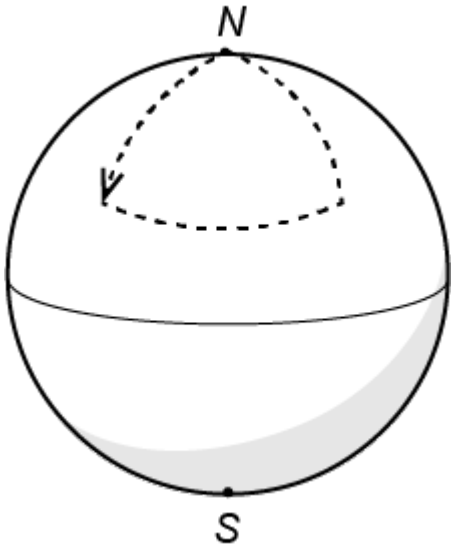
Afbeelding 1. Een ijsbeer. Foto: Alan Wilson.

De jager en de beer

We beginnen met een raadsel dat we kunnen gebruiken om het idee van geometrische fasen uit te leggen. Het gaat als volgt: ergens op aarde is een jager naarstig op zoek naar een beer. Met kompas in de hand legt de jager de volgende route af. Allereerst zet de jager honderd stappen naar het Zuiden, dan honderd stappen naar het Oosten en vervolgens weer honderd stappen naar het Noorden. Verrassend genoeg staat de jager nu op precies dezelfde plek als waar hij begonnen is. Wat is de kleur van de beer?

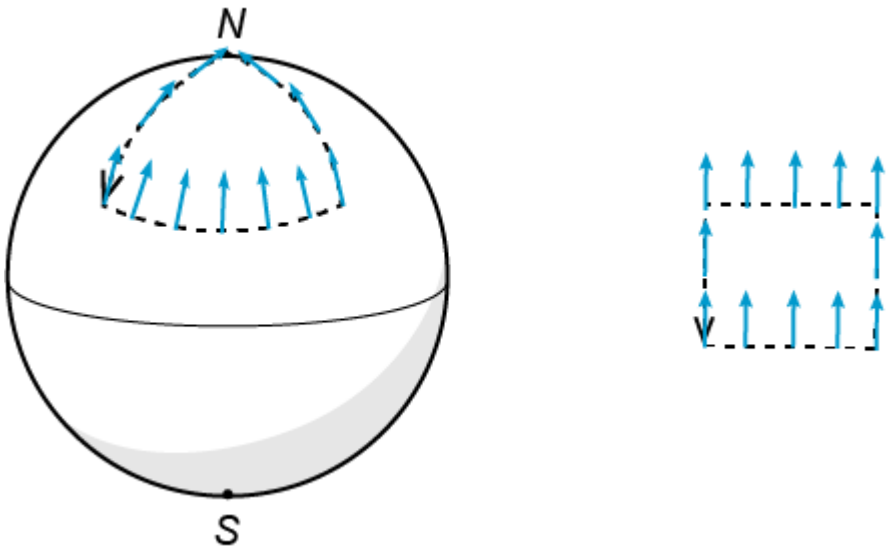
Het antwoord op deze vraag is ‘wit’. De jager moet zich namelijk op de Noordpool bevinden en is daar dus op zoek naar een ijsbeer. We gaan er voor de goede orde vanuit dat de jager geen beren vindt op zijn rondgang en zonder slachtoffers terugkeert naar huis!

Nog steeds in complete verwarring? Dat is helemaal niet gek als je je de route van de jager probeert voor te stellen in het platte vlak. In dat geval brengt eerst naar onderen lopen, dan naar rechts lopen en vervolgens naar boven je nooit naar dezelfde plek terug. De truc van dit raadsel is dat de jager zich niet in het platte vlak bevindt, omdat de aarde de vorm van een bol heeft. Stel je deze wereldbol voor met de jager op het allernoordelijkste puntje, de precieze Noordpool dus. De jager kan nu alleen in Zuidelijke richting lopen – welke kant hij ook op gaat. Als hij honderd stappen naar het Zuiden heeft gedaan, loopt hij honderd stappen naar het Oosten, dus langs een breedtecirkel. Tot slot loopt hij weer honderd stappen in noordelijke richting en komt uiteindelijk weer precies op de Noordpool terecht. Voor de duidelijkheid is de volledige route die de jager aflegt weergeven in afbeelding 2.



Afbeelding 2. Het pad van de jager op de wereldbol. De jager loopt een stuk naar het zuiden, dan naar het oosten, en dan naar het noorden – en is dan terug waar hij begonnen is!

De reden dat dit raadsel op het eerste gezicht lastig is, is dat we in het dagelijks leven niet gewend zijn om na te denken over de meetkunde van andere vormen dan het platte vlak. De gekromde vorm van de wereldbol – dit noemen we ook wel de *geometrie* – is precies wat tot het ontstaan van *geometrische fasen* gaat leiden. Wat heeft dit raadsel te maken met het concept van geometrische fase? Daartoe moeten we iets beter kijken naar de richting van het geweer dat de jager vasthoudt. Het geweer stellen we ons voor het gemak voor als een grote pijl op het boloppervlak. We zijn nu geïnteresseerd in de richting van deze pijl – die richting zal de geometrische fase bepalen. De jager volgt het pad zoals hierboven werd beschreven – van en naar de Noordpool – met als enige eis dat zijn geweer naar het noorden gericht blijft. In afbeelding 3 (links) is het pad van deze pijl weergeven. Daar is iets belangrijks te zien: bij terugkomst op de Noordpool is het geweer van de jager niet meer in dezelfde positie als waarin het begon, maar met een hoek gedraaid! Deze draaihoek is wat we in dit voorbeeld de geometrische fase noemen.



Afbeelding 3. Geometrische fase. De blauwe pijl stelt het

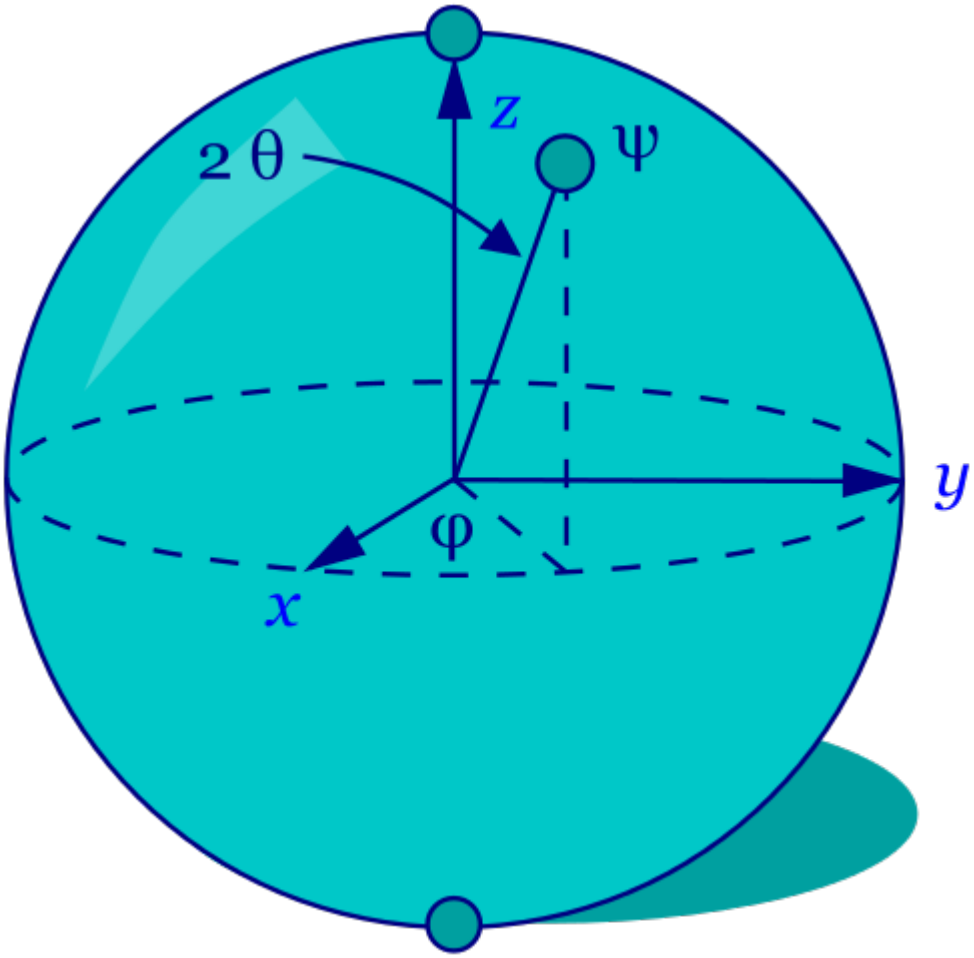
geweer van de jager voor. Links: de jager legt een gesloten route af op de wereldbol, waarbij zijn geweer constant naar het noorden gericht blijft. Bij terugkomst is het geweer gedraaid ten opzichte van de originele richting. Rechts: de jager legt een gesloten route af in het platte vlak, waarbij zijn geweer constant naar het noorden gericht blijft. Bij terugkomst is het geweer in de originele positie.

Wat heeft de draaihoek van het geweer met de vorm van de wereldbol te maken? Dit wordt het duidelijkst als we de vergelijking maken met het platte vlak. Daar is de situatie namelijk heel anders. Als we de jager eenzelfde soort rondgang laten doen (die er nu natuurlijk anders uitziet dan op de bol, met de gebruikelijke vier rechte hoeken), zien we dat het geweer bij terugkomst niet van richting is veranderd. Dit is te zien in afbeelding 3 (rechts). Het feit dat het geweer bij de poolwandeling iets gedraaid is bij terugkomst, is volledig te wijten aan de vorm van de bol, vandaar de naam geometrische fase. (Een ‘fase’ is niets anders dan de natuurkundige term voor een draaihoek.) De precieze reden voor het verschil is dat de richting ‘het noorden’ op de bol een lokaal begrip is dat op iedere plek een andere betekenis heeft. In het vlak is ‘het noorden’ voor iedereen juist in dezelfde richting. Dit betrekkelijk eenvoudige voorbeeld laat zien hoe een ‘ommetje’ op een bolvormig object kan leiden tot geometrische ‘draaihoeken’.

De Berryfase

In de natuurkunde bestaan ook voorbeelden van geometrische fasen. Een interessant voorbeeld is de zogenaamde *Berryfase* – ontdekt door Sir Michael Berry in 1984. De fase is in dit geval iets abstracter dan in het geval van de jachtgeweer, maar het principe is hetzelfde. We moeten ons afvragen welke dingen hier de rol spelen van het geweer, de wereldbol en de draaihoek. De Berryfase is een begrip in de *quantummechanica* – de natuurkundige theorie voor heel kleine deeltjes. In de quantummechanica wordt de toestand van zo’n deeltje – bijvoorbeeld van een elektron – beschreven door een *vector*, een wiskundig object dat een *grootte* en een *richting* heeft. Een eenvoudige voorstelling van hoe zo’n quantumtoestand eruit ziet is een *qubit*, de quantumversie van een *bit* in een computer. Kort gezegd kan een qubit een beetje 0 en een beetje 1 zijn. Die beschrijving is echter wat vaag; veel preciezer[1] kun je je een qubit voorstellen als het jachtgeweer, namelijk een pijl die in een bepaalde

richting wijst. De richting van de pijl geeft aan 'in welke mate' de qubit een 0 is en in welke mate een 1: als de pijl naar 0 of 1 wijst is de qubit voor 100% in die toestand, maar wijst de pijl er ergens tussenin, dan is er sprake van een 'tussentoestand', die een beetje van allebei is. Als je nog beter wilt snappen wat qubits zijn, is dit artikel interessant om te bekijken.



Afbeelding 4: De 'Blochbol'. Een meetkundige voorstelling van een qubit. We kunnen ons de toestand van de qubit voorstellen als een pijl die in een bepaalde richting wijst. Afbeelding: MuncherOfSpleens.

We kunnen de toestand van een quantumdeeltje dus vergelijken met het jachtgeweer. Net zoals we het jachtgeweer een rondgang kunnen laten maken over de wereldbol, willen we de quantumtoestand van de qubit ook op een bepaalde manier 'een rondje laten gaan'. Deze rondgang is in dit geval iets abstracter dan in het jager-en-de-beer-voorbeeld. Het idee is namelijk dat we het deeltje niet *fysiek* verplaatsen door de ruimte, maar dat we in plaats daarvan de eigenschappen, dus de *toestand* van het deeltje – bijvoorbeeld zijn energie – verstoren. Een manier om de toestand te verstoren is door het deeltje bijvoorbeeld in een

extern magnetisch veld te plaatsen. We kunnen het magnetisch veld nu zwakker of sterker maken en dit zal direct invloed hebben op de ‘richting’ van de quantumvector die vertelt in welke mate de qubit 0 en 1 weergeeft. Wat speelt in deze analogie de rol van de wereldbol? Je verwacht misschien dat dat de Blochbol van verschillende toestanden is, maar dat is niet het geval: verschillende plekken op de wereldbol corresponderen met verschillende sterktes en richtingen van het magneetveld – ook de toestanden van het externe magneetveld kun je met zo’n bol beschrijven, en het is die bol die de rol van de wereldbol speelt. Zo bedoelen we met de ‘Noordpool’ bijvoorbeeld dat het magneetveld uit staat, terwijl een stukje naar het zuiden lopen het magneetveld iets aandraait – waarbij de richting van het magneetveld afhangt van de richting waarin je naar het zuiden loopt.

Hoe kunnen we ons het gesloten pad op de wereldbol nu voorstellen? Stel dat we beginnen met een quantumdeeltje dat zich op ‘de Noordpool’ van de wereldbol bevindt – hiermee bedoelen we dus dat het magneetveld *uit* staat. Zodra we het magneetveld aandraaien verandert de quantumvector langzaam van richting – dit is het equivalent van ‘over de wereldbol lopen’. Vervolgens verander je de richting van het magneetveld – het ‘lopen langs de breedtecirkel’. Uiteindelijk draaien we het magneetveld weer uit en keert de quantumvector terug op ‘de Noordpool’. De eindsituatie is dus dezelfde als de beginsituatie: géén magneetveld. Maar net als het geweer dat bij terugkomst iets gedraaid is ten opzichte van zijn originele positie kan de quantumtoestand bij terugkomst een fase ontwikkeld hebben: de Berryfase. Hoe moeten we over deze ‘draaihoek’ nadenken in termen van natuurkunde? Zoals eerder genoemd bepaalt de richting van de quantumvector de toestand van het quantumdeeltje. Als deze pijl iets gedraaid is ten opzichte zijn originele positie – in andere woorden: als de pijl een Berryfase heeft gekregen – is de toestand van het quantumdeeltje veranderd. Dit kan bijvoorbeeld een klein verschil in energie zijn, wat vervolgens met een geschikt experiment kan worden gemeten.

Berryfasen blijken ook een belangrijke rol te spelen in de *gecondenseerde materie* (de theorie van vaste stoffen) waar ze gebruikt kunnen worden om bepaalde elektronische eigenschappen van geleidende materialen uit te leggen. Recent hebben Berry fasen ook een onverwachtse toepassing gevonden binnen de *AdS/CFT correspondentie* – een poging om quantummechanica en zwaartekracht met elkaar te verenigen. Het lijkt erop dat de Berryfase in de quantumtheorie gebruikt kan worden om bepaalde grootheden in de zwaartekrachttheorie – bijvoorbeeld de kromming van de ruimtetijd – uit te rekenen. Dit zou

een mooi voorbeeld geven van hoe ruimtetijd en zwaartekracht kunnen ontstaan uit quantummechanica, een idee dat in dit artikel al eerder werd besproken.

Samenvattend hebben we gezien hoe een ommetje soms veel verschil kan maken. Een in een bepaalde richting wijzend jachtgeweer dat een rondgang over de wereld maakt kan bij terugkomst opeens in een heel andere richting wijzen. De draaihoek, ook wel geometrische fase genoemd, is het gevolg van de gekromde vorm van de bol. We hebben gezien hoe zulke geometrische fasen ook in de natuurkunde kunnen voorkomen: je kunt over de quantumtoestand van een deeltje nadenken als een pijl die je ook een ommetje kan laten maken. De rondgang is in dit geval niet door de fysieke ruimte maar door een meer abstracte ruimte van alle mogelijke sterktes en richtingen van een magneetveld. De abstracte ‘draaihoek’ die de quantumvector kan oppakken wordt ook wel de Berryfase genoemd, en we kunnen met experimenten aan het deeltje daadwerkelijk die fase meten. Een mooi verschijnsel om eens over na te denken als je de volgende keer buiten een rondje gaat lopen.

---

[1] Een belangrijk verschil met het geweer is dat de quantumvector waardes kan aannemen in de *complex getallen*.