Een supersymmetrisch kopje koffie

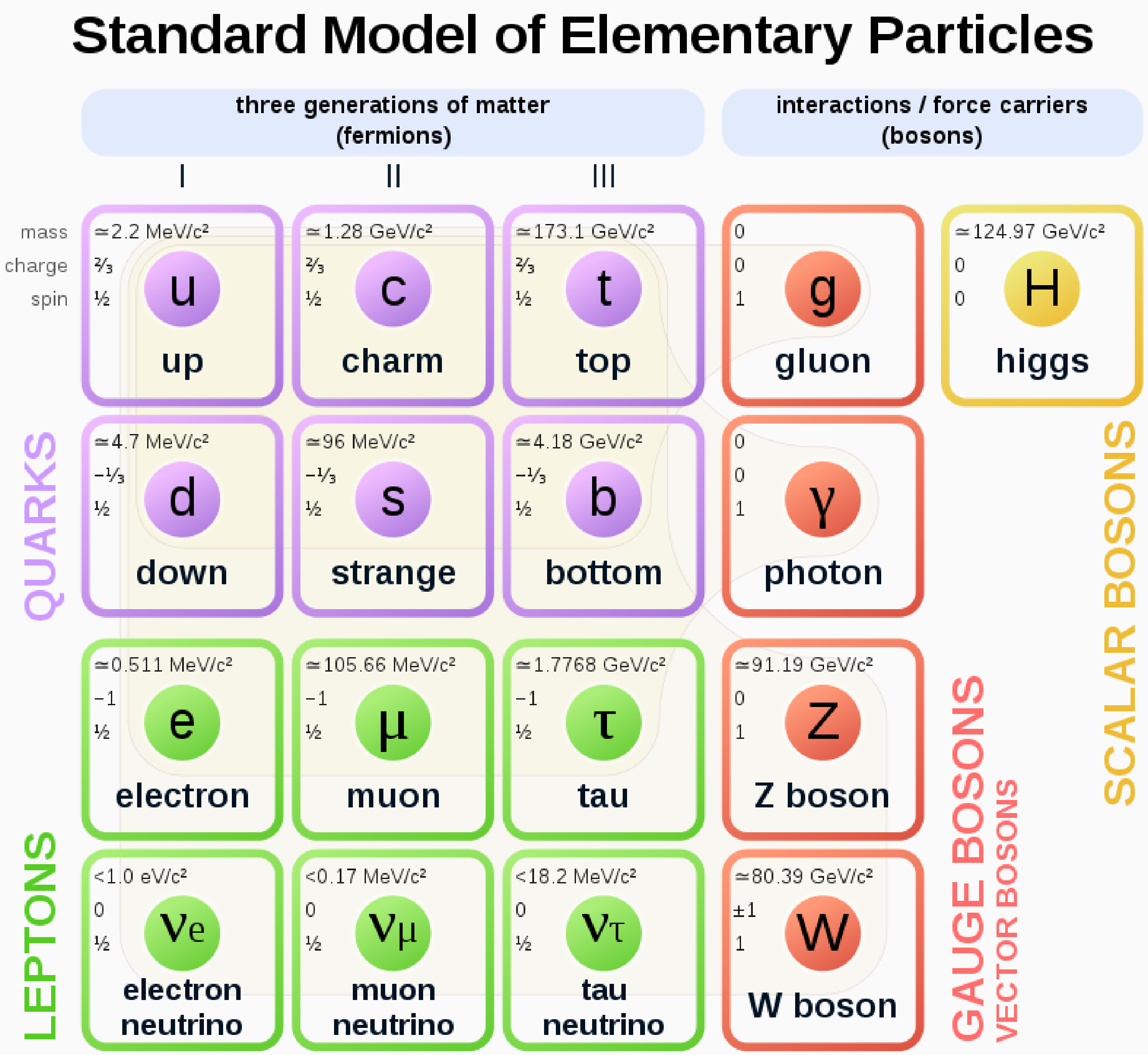
Wiskunde is een belangrijk gereedschap in de natuurkunde, maar werkt dit ook andersom? Kun je natuurkundige ideeën gebruiken om een wiskundig vermoeden te bewijzen? Een van de eerste voorbeelden waarin dit gebeurde is een artikel uit 1982, waarin de snaartheoreet Edward Witten de natuurkunde gebruikt om een probleem in de wiskunde op te lossen. Hieronder lees je hoe je met behulp van een kopje koffie, een donut en supersymmetrie een verrassend resultaat in de topologie kunt afleiden.

Afbeelding 1. Een kopje koffie. Foto: Toshihiro Oimatsu.

Supersymmetrie

De materie en krachten in ons heelal zijn opgebouwd uit kleine bouwstenen, ook wel *elementaire deeltjes* genoemd. De zoektocht naar deze bouwstenen maakt gebruik van grote deeltjesversnellers – bijvoorbeeld de Large Hadron Collider (LHC) van CERN – waarmee nieuwe deeltjes via hogesnelheidsbotsingen gemaakt kunnen worden. Tot nu toe hebben natuurkundigen op deze manier een aantal van zulke fundamentele legoblokjes gevonden – de laatste was het *Higgsdeeltje* in 2012 – en het ‘periodiek systeem’ van deze deeltjes staat ook wel bekend als het standaardmodel – zie afbeelding 2 voor een overzicht.

De deeltjes in het standaardmodel kunnen we opdelen in twee verschillende soorten: *fermionen* en *bosonen*. Fermionen zijn deeltjes waarmee je gewone materie kunt maken; denk hierbij aan een elektron dat je samen met andere deeltjes kunt gebruiken om een atoom te maken. Bosonen zijn juist deeltjes die met krachten overeenkomen. Een voorbeeld van zo’n boson is een foton, een lichtdeeltje dat de elektromagnetische kracht overdraagt.



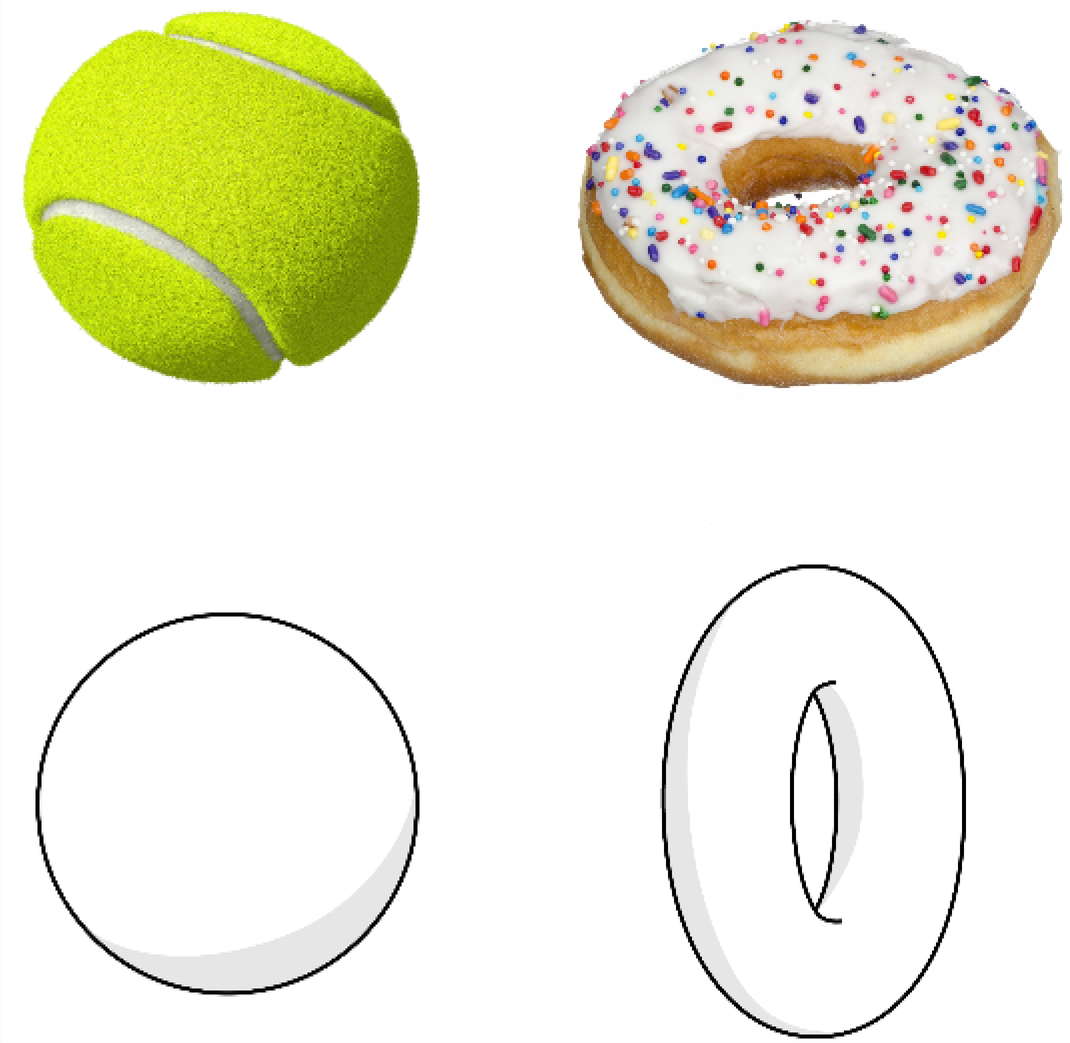
Afbeelding 2. Het standaardmodel van elementaire deeltjes. Dit model bestaat uit twaalf fermionen (in de drie linkerkolommen) en viif bosonen (in de twee rechterkolommen). Hieruit zijn alle materie en krachten (behalve de zwaartekracht – het is nog een open vraag hoe die precies in dit model past) opgebouwd. Afbeelding: MissMJ, Cush.

Bosonen en fermionen gedragen zich dus heel verschillend. Toch bestaan er natuurkundige theorieën waarin er een symmetrie bestaat tussen de bosonen en fermionen. De theorie van *supersymmetrie* voorspelt dat er voor ieder deeltje in het standaardmodel een zogenaamde *superpartner* zou moeten zijn – dat wil zeggen: een ander deeltje met precies dezelfde eigenschappen als het originele deeltje, maar een boson in plaats van een fermion en vice versa. Zo voorspelt supersymmetrie bijvoorbeeld het bestaan van een 'selektron' en een 'fotino', de bosonische en fermionische partners van respectievelijk het elektron en het foton.

Supersymmetrische theorieën hebben veel mooie eigenschappen, omdat je de fermionen en bosonen in zekere zin op gelijke voet kan behandelen. Supersymmetrie is daarnaast een belangrijk ingrediënt van *snaartheorie*, een theorie die poogt om zwaartekracht en het standaardmodel te verenigen. Tot nu toe zijn we in onze deeltjesversnellers echter nog geen enkele superpartner tegengekomen, iets wat je wel zou verwachten aangezien de meeste eigenschappen van gewone deeltjes – die we veelvuldig aantreffen – overeenkomen met die van hun partners. Het ontbreken van deze ontdekkingen heeft er daarom voor gezorgd dat supersymmetrie, in ieder geval in de originele vorm, een groot deel van haar achterban heeft verloren. Toch is supersymmetrie niet zonder nut gebleken, al is het alleen al door de toepassingen binnen de wiskunde – met name in het vakgebied wat bekend staat als *topologie*.

Een topologische CT-scan

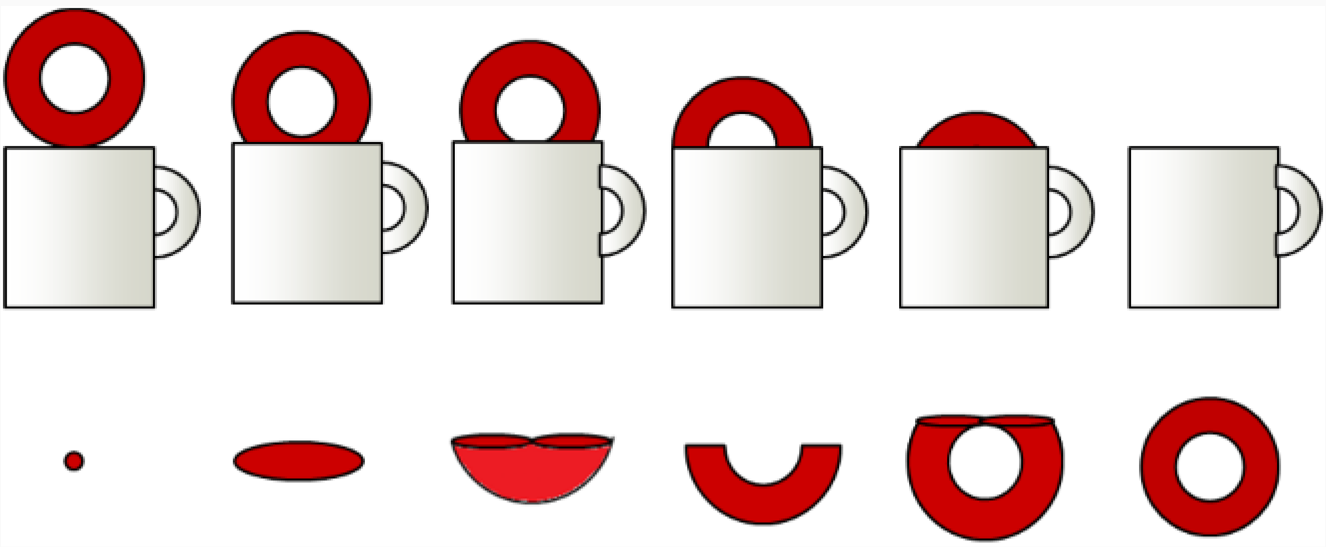
Topologie is de wiskundige theorie van vormen. Je kunt hierbij denken aan de vorm van alledaagse objecten, zoals een tennisbal, een donut of een koffiekopje. Met de topologie van zo'n object bedoelen we grofweg z'n algehele vorm. Je mag de objecten daarbij vervormen voordat je ze vergelijkt: wiskundigen zijn namelijk geïnteresseerd in eigenschappen die hetzelfde blijven als de vorm wordt gekneed, uitgerekt of op een andere `mooie' manier wordt vervormd. De vervormingen die zijn toegestaan noemen we *continu*, wat ongeveer betekent dat we nadenken over het object alsof het kneedbaar is. Wat we echter niet mogen doen is knippen: dit is geen continue vervorming! De tennisbal hieronder kan bijvoorbeeld worden uitgerekt in de vorm van een kubus of een piramide, maar je kunt 'm niet continu vervormen tot een donut. Daarvoor zouden we een gat moeten knippen in de tennisbal. De tennisbal en de donut hebben dus verschillende *topologieën*.



Afbeelding 3: Topologie. De tennisbal en de donut – boven in de alledaagse vorm, onder getekend als abstracte wiskundige objecten – hebben verschillende topologieën. Afbeelding tennisbal: OpenClipart.

Twee objecten die in dezelfde vorm kunnen worden gekneed noemen we *homeomorf* (van het Griekse woord \`homeo', wat \`gelijk' betekent, en \`morphe' wat \`vorm' betekent). In de eenvoudige voorbeelden van een tennisbal en een donut zie je direct met welke andere vormen ze homeomorf zijn, maar het blijkt in het algemeen erg lastig om te bepalen of twee vormen homeomorf zijn of niet. Een manier om iets te leren over de vorm is door te kijken naar bepaalde eigenschappen die voor homeomorfe vormen hetzelfde zijn, zogenaamde *topologische invarianten*. Een voorbeeld van een topologische invariant is het aantal losse stukken waaruit de vorm bestaat: zo kan ik uit een tennisbal nooit twee tennisballen maken door enkel te kneden. Het volume (de ‘inhoud’) van een vorm is een voorbeeld van een eigenschap die géén topologische invariant is: homeomorfe vormen kunnen best verschillende volumes hebben: denk aan twee ballen van verschillende groottes.

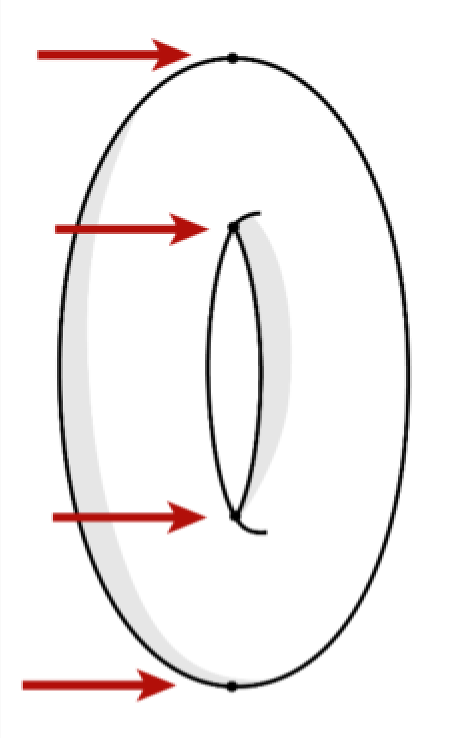
Een manier om de topologie van een object te onderzoeken en topologische invarianten te vinden is met behulp van *Morsetheorie*. Het idee van Morsetheorie is dat we een vorm willen bestuderen door ’m in plakjes te snijden. Deze werkwijze is ook praktisch toepasbaar. In een CT-scan wordt precies dezelfde techniek toegepast: wanneer je door zo’n scan gaat, worden er gigantisch veel foto’s gemaakt waar dwarsdoorsnedes van je lichaam op staan. Door nu een voor een door deze foto’s heen te scrollen kan de arts afleiden hoe bepaalde dingen er in de binnenkant van je lichaam uitzien. Wiskundig gezien doen we zo’n ‘CT-scan’ met behulp van een functie, de zogenaamde *Morsefunctie*. Fijn aan Morsetheorie is dat we bijzonder veel informatie over de topologie kunnen halen uit de eigenschappen van een aantal losse punten op het object dat we onderzoeken: de *kritieke punten*[1] van de Morsefunctie. Om het idee van de kritieke punten uit te leggen bekijken we het voorbeeld van een donut.



Afbeelding 4. Morsetheorie. We kunnen de topologie van een donut bestuderen door

hem langzaam in een kopje koffie te laten zakken. Het deel van de donut dat ondergedompeld is (weergegeven onder het koffiekopje) verandert zo stapsgewijs van vorm, beginnend als een punt, dan een schijfje, vervolgens een buis, en tot slot komen beide uiteinden van de buis samen als de volledige donut in de mok zit.

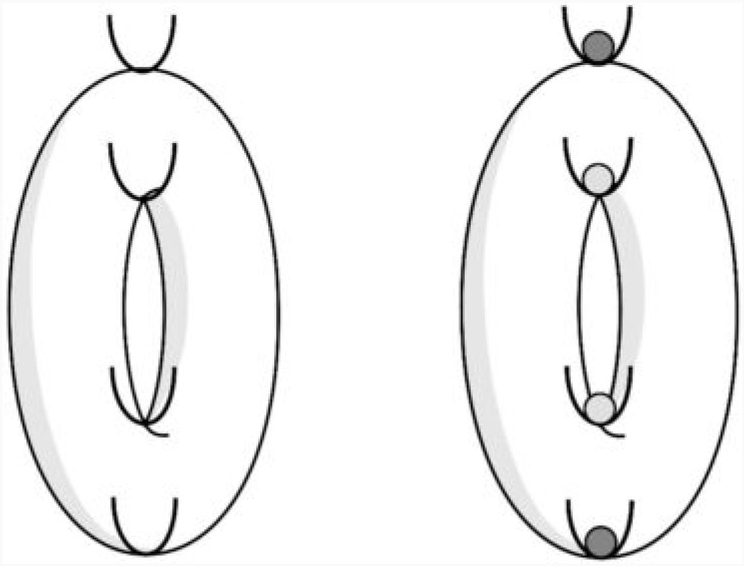
Een manier om in te zien wat de kritieke punten van de Morsefunctie zijn en waarom ze belangrijk zijn voor de topologie van de donut, is door het volgende voor jezelf uit te proberen. Neem een (grote) kop koffie en je favoriete donut, en laat de donut vervolgens langzaam in de koffie glijden. Je kunt dit natuurlijk ook met een tennisbal doen, maar zoals we zullen zien is dat een stuk minder interessant. Pas op dat je bij het onderdompelen geen koffie `morst'! We letten nu goed op het deel van de donut dat is ondergedompeld in de koffie. Hierbij bekijken wiskundigen meestal alleen het oppervlak van de donut: we doen dus alsof de donut hol is. In afbeelding 4 is schematisch te zien hoe de vorm van het ondergedompelde oppervlak verandert naarmate een groter stuk van de donut in de koffie zit: het begint als een punt, wordt dan een schijfje, vervolgens een buis, dan een donut met een hapje eruit en eindigt als een volledige donut. We zien daarmee dat er maar op vier punten in deze handeling iets (topologisch) interessants gebeurt, namelijk wanneer een *kritiek punt*[2] de koffie raakt. Vanaf het moment dat de onderkant van de donut (dit is het eerste kritieke punt) in de koffie terechtkomt is de vorm homeomorf aan een schijfje. Dit verandert pas wanneer we het tweede kritieke punt passeren. Dan wordt de schijf opeens een buis – een cylinder, dus. Zo kunnen we doorgaan, waarbij we nog twee kritieke punten tegenkomen. Dit is precies hoe Morsetheorie werkt: we kunnen de topologie van de vorm begrijpen door enkel te kijken naar wat er rondom de kritieke punten gebeurt.



Afbeelding 5. De kritieke punten van een rechtopstaande donut. Als je doorsnedes maak van de donut op verschillende hoogtes, zijn dit de punten waar deze doorsnedes van vorm veranderen.

Een `tunneling’-probleem

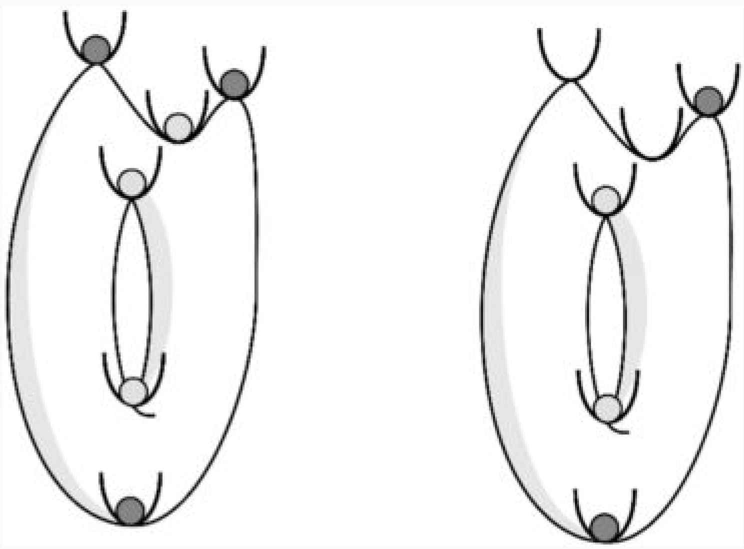
Edward Witten gaf in 1982 een natuurkundige interpretatie aan de Morsefunctie: hij zag (de afgeleide van) de Morse-functie als de beschrijving van een soort berglandschap op de donut, waarin fictieve elementaire deeltjes zouden kunnen bewegen. Die deeltjes kunnen zowel bosonen als fermionen zijn. In het vervolg zullen we ons de fermionen en bosonen voorstellen als knikkers, met verschillende kleuren, zeg grijs en lichtgrijs. De Morsefunctie, het berglandschap op de donut waar de balletjes overheen kunnen rollen, noemen we in de natuurkunde een *potentiaal*.



Afbeelding 6. Een berglandschap op de donut. Links: Het berglandschap op de donut. Boven ieder kritiek punt zit een dal, een potentiaalputje, waar de knikkers in terecht kunnen komen. Rechts: Bosonen en fermionen voorgesteld als knikkers van verschillende kleuren.

Je kunt nu laten zien dat we voor ieder kritiek punt een potentiaalputje krijgen omdat de afgeleide van de Morsefunctie daar gelijk is aan nul – het berglandschap is daar 'vlak'. In afbeelding 6 zijn de putjes rond ieder kritiek punt aangegeven. Wanneer we deeltjes op de donut laten `bewegen' komen een aantal van die deeltjes in de putjes terecht – en wel op zo'n manier dat bosonen en fermionen gelijkmatig over de putjes worden verdeeld. Voor de donut hebben we vier kritieke punten, dus vier deeltjes: twee fermionen en twee bosonen.

Nu komt Witten's geniale inzicht: het totaal aantal deeltjes in de potentiaalputjes is in het algemeen een topologische invariant! Om dit te illustreren bekijken we de `vervormde' donut uit afbeelding 7. Deze donut met deukje is homeomorf aan de gewone donut, omdat we nergens hebben geknipt of gescheurd. Het deukje zorgt ervoor dat we nu zes kritieke punten hebben. Rond ieder kritiek punt krijgen we nu een potentiaalputje met daarin het bijbehorende deeltje. Er lijkt op het eerste gezicht iets vreselijk mis te gaan: het totaal aantal deeltjes is niet vier, zoals bij de donut, maar zes! Het lijkt er daarom op alsof het totaal aantal deeltjes *niet* gelijk is aan dat van de originele donut.



Afbeelding 7. Een donut met een deukje. Links: Ten opzichte van de donut zonder deuk hebben we hier twee potentiaalputjes extra. Deze zijn gevuld met respectievelijk een boson en een fermion. Rechts: Door quantumeffecten kan een van de deeltjes naar het andere putje `tunnelen'. In dit geval gebeurt dat voor één boson-fermionpaar, waardoor de twee deeltjes elkaar opheffen. Voor de gedeukte donut houden we dus nog steeds vier deeltjes over.

Dit probleem is ontstaan doordat we niet helemaal zorgvuldig zijn geweest. De elementaire deeltjes die we bekijken zijn namelijk geen echte knikkers, maar zo klein dat hun gedrag wordt beschreven door een theorie die we *quantummechanica* noemen. Binnen de quantummechanica is er een bijzonder verschijnsel dat bekend staat als *quantumtunneling*.

Hierbij kan een quantumdeeltje als het ware door de `muur’ van een potentiaalputje heen `tunnelen’ en in één van de andere putjes terechtkomen. Dit klinkt wellicht als iets uit een sciencefictionfilm, maar dit is daadwerkelijk hoe kleine deeltjes zich gedragen! Quantumtunneling is precies het effect waar we hier rekening mee moeten houden. Het boson linksboven tunnelt naar het fermion in het putje daaronder en zorgt ervoor dat beide deeltjes uit het potentiaalputje verdwijnen. Je kunt dit vergelijken met hoe deeltjes en ‘antideeltjes’ elkaar opheffen: in Wittens supersymmetrische theorie heffen bosonen en fermionen elkaar in zekere zin ook precies op. Zoals te zien is in afbeelding 7 hebben we nu opnieuw een totaal van vier deeltjes. Door technieken uit de supersymmetrie te gebruiken blijkt dit in het algemeen te werken. Hoe je de donut ook vervormt, uiteindelijk blijven er door het tunnelingeffect altijd vier deeltjes over.

Kortom, we zien dat Witten met behulp supersymmetrie een eigenschap vond die voor homeomorfe vormen hetzelfde is: het totaal aantal fermionen en bosonen in de putjes van de potentiaal. Deze natuurkundige grootheid is dus een topologische invariant! Het blijkt dat de vertaling naar de wiskunde overeenkomt met een van de belangrijkste topologische invarianten die er bestaat: de *cohomologie* van een vorm. Door met een natuurkundige bril naar een wiskundig probleem te kijken hebben we op een onverwachte manier een oplossing gevonden. De samenwerking tussen natuurkunde en wiskunde blijkt op deze manier enorm vruchtbaar te zijn. Het artikel van Edward Witten uit 1982 was een van de eerste keren dat natuurkunde gebruikt werd om iets in de wiskunde te `bewijzen’, maar zeker niet de laatste. Met de recente ontwikkelingen in bijvoorbeeld de snaartheorie is het einde van deze innige samenwerking nog lang niet in zicht.

---

[1] Dit zijn de punten waar de afgeleide van de Morsefunctie gelijk is aan nul.

[2] De Morsefuctie is in dit geval de `hoogte’ van de donut.