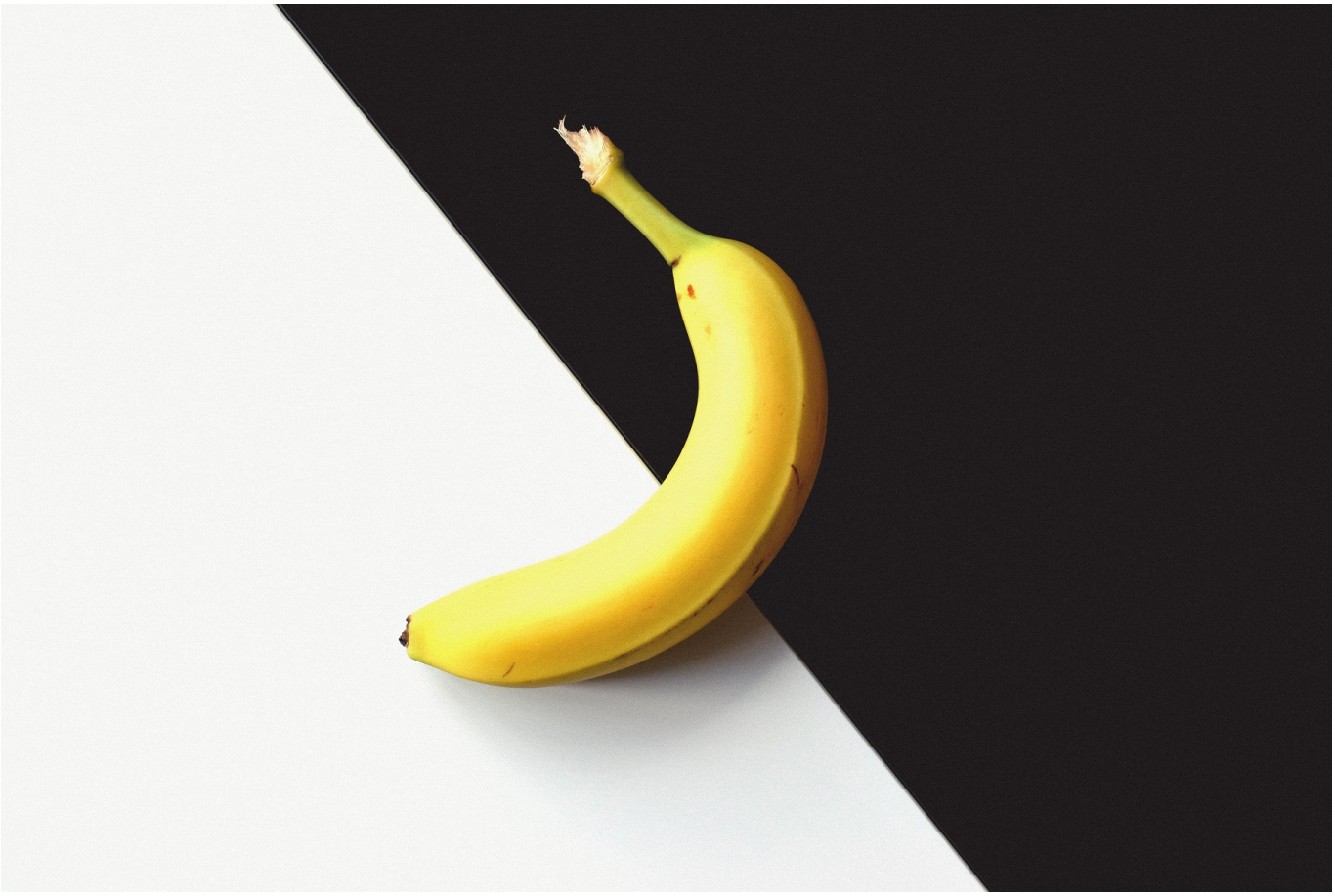
Het antiuniversum

Kleine dingen worden beschreven door de quantummechanica, snelle dingen door de speciale relativiteitstheorie van Albert Einstein. Maar hoe beschrijf je een elektron dat niet alleen heel klein is, maar ook heel snel gaat? In dit artikel leg ik uit hoe de theoretisch natuurkundige Paul Dirac de quantumwereld en de speciale relativiteit wist te verenigen, en daarmee voorspelde dat er een mysterieuze vorm van materie – zogenaamde antimaterie – moet bestaan.

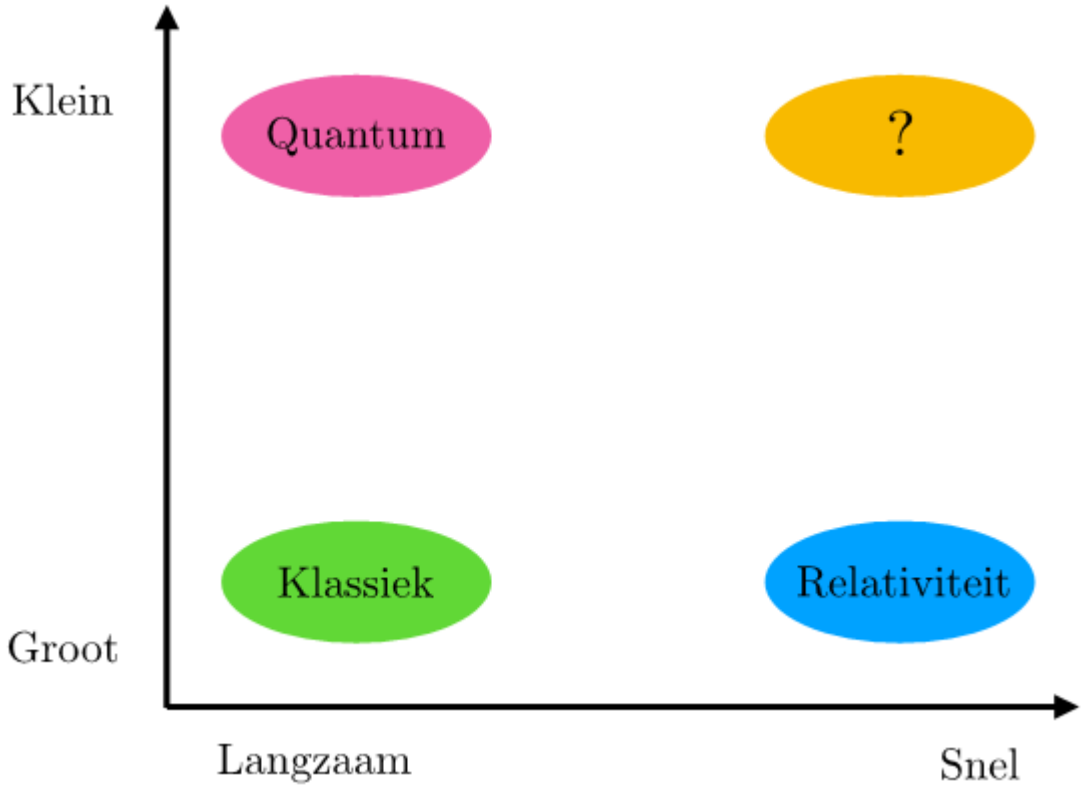


Afbeelding 1. Een bron van antimaterie? Bananen produceren antimaterie door zo nu en dan bij verval van de radioactieve isotoop kalium-40 een positron – de antipartner van het elektron – uit te zenden. Maar maak je niet druk: deze positronen bestaan maar heel kort, omdat ze bijna onmiddellijk worden vernietigd door contact met gewone materie. Foto via

Piqsels.

Quantummechanica gaat over de natuur in het klein. Met de ontdekking van de atoomkern aan het begin van de 20e eeuw kwam de klassieke natuurkunde op losse schroeven te staan: een positief geladen atoomkern met daaromheen draaiende negatief geladen elektronen kon volgens de toen bekende natuurwetten niet stabiel zijn. De Deense natuurkundige Niels Bohr zette een drastische stap door te postuleren dat de natuurkunde op de schaal van het atoom zich op een heel andere manier gedraagt dan we op onze schaal gewend zijn. Bohrs atoommodel – waarbij elektronen enkel in 'gequantiseerde' banen rond de atoomkern konden bewegen – was een eerste stap in de ontwikkeling van deze quantumtheorie. De wiskundige beschrijving van de quantummechanica werd verder verfijnd door Werner Heisenberg en Erwin Schrödinger, met als een van belangrijkste resultaten de Schrödingervergelijking waarin het elektron niet als deeltje, maar als golffunctie wordt beschreven. Berekeningen aan deze golfvergelijking voor het waterstofatoom bleken tot dan toe onverklaarbare *spectraallijnen* van waterstof te reproduceren: een monumentale prestatie van de quantumtheorie!

Er was echter een probleem met de formulering van de quantummechanica, namelijk dat die volledig was opgebouwd als een generalisatie naar kleine schaal van de wetten van Newton uit de klassieke mechanica. Het was bekend dat deze klassieke wetten moesten worden aangepast voor objecten die met heel hoge snelheid gaan: de precieze aanpassing van Newtons wetten via relativistische effecten werd beschreven door Albert Einstein in zijn beroemde speciale relativiteitstheorie uit 1905. De Schrödingervergelijking was echter alleen toepasbaar voor elektronen die veel langzamer gaan dan de lichtsnelheid. Was er een soortgelijke quantumvergelijking voor elektronen die met *relativistische* snelheden bewegen?



Afbeelding 2. Quantumrelativiteit. De klassieke natuurkunde, quantummechanica en speciale relativiteitstheorie zijn schematisch in een assenstelsel weergeven: van links naar rechts gaat van langzaam naar snel, en van onder naar boven gaat van groot naar klein. Het grensvlak tussen beide – waarbij iets heel klein is en tegelijkertijd heel snel gaat – is rechtsboven weergeven met een vraagteken.

De Diracvergelijking

De eerste persoon die er echt in slaagde om relativiteit en quantummechanica te verenigen in een vergelijking voor het elektron was de Britse natuurkundige Paul Dirac. Een eerdere poging om een relativistische vergelijking voor het elektron te vinden – door onder anderen de natuurkundigen Klein en Gordon – was ook interessant, maar niet volledig succesvol. De *Klein-Gordonvergelijking* uit 1926 (recent besproken in dit artikel door Alexander van Spaendonck) vormde een quantumversie van de relativistische energie-impulsrelatie, maar slaagde er niet in om een specifieke eigenschap van het elektron genaamd *spin* te beschrijven. Dirac begon daarom met verschillende soorten formules te experimenteren. In 1928 had hij eindelijk een doorbraak. Om precies te zijn was Diracs cruciale inzicht om de ‘wortel van de Klein-Gordonvergelijking’ te bekijken. In meer wiskundige termen zocht Dirac naar een oplossing van de volgende vergelijking:

$$\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 - \partial_t^2 = (A \partial_x + B \partial_y + C \partial_z + i D \partial_t) (A \partial_x + B \partial_y + C \partial_z + i D \partial_t)$$.

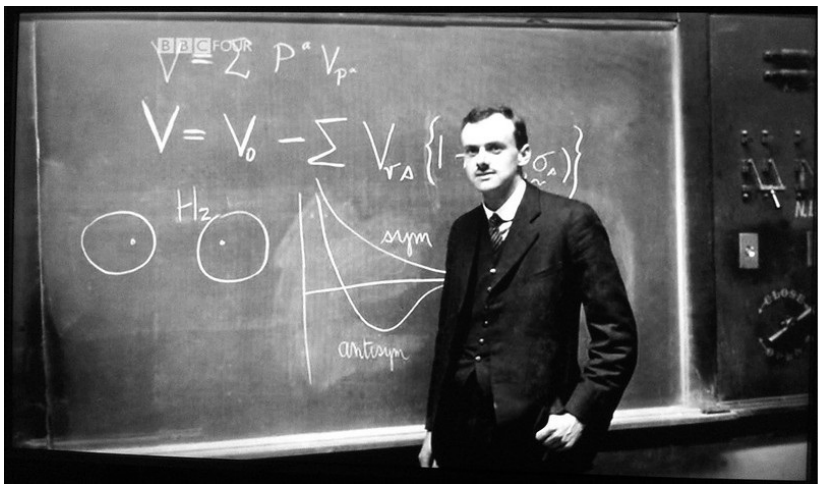
Aan de linkerkant van het isgelijkteken staat de *Laplaceoperator*, die een centrale plek heeft in de Klein-Gordonvergelijking. De symbolen $\partial_x, \partial_y, \ldots$ staan voor het nemen van de afgeleiden naar de variabelen $x, y, \ldots$ en het symbool i staat voor het imaginaire getal dat in het kwadraat -1 geeft. Door aan de rechterkant de haakjes weg te werken en te vergelijken met de linkerkant, vind je al snel dat de kruistermen waarin je bijvoorbeeld $A \partial_x$ met $B \partial_y$ vermenigvuldigt en omgekeerd, nul moeten zijn. Na wat rekenwerk geeft dat de volgende condities op de coëfficiënten[1]:

$$A \times B + B \times A = 0, \qquad A \times C + C \times A = 0, \qquad \ldots$$.

Mocht de bovenstaande afleiding iets te snel zijn gegaan – of is het gebruik van wiskundige formules gewoon niet helemaal je ding – dan is dat niet erg voor het begrijpen van de rest van dit artikel. Voor nu is het belangrijk om stil te staan bij de bovenstaande condities. Als je goed kijkt naar de eerste conditie valt je misschien iets geks op: zodra ik voor A en B gewone getallen neem die niet nul zijn, is de vergelijking nooit waar. Als je twee van zulke getallen met elkaar vermenigvuldigt maakt de volgorde niet uit, dus de som van $A \times B$ en $B \times A$ kan nooit samen nul geven. Bijvoorbeeld: voor *A=3* en *B=2* vind je

$$3 \times 2 + 2 \times 3 = 12 \neq 0$$.

Dirac, die zelf innig betrokken was geweest bij de *matrixformulering* van de quantummechanica, zag direct dat de bovenstaande conditie alleen kon worden opgelost met coëfficiënten die geen getallen maar *matrices* waren. Een *matrix* is – anders dan de beroemde film doet vermoeden – een tabel met getallen. (Zie bijvoorbeeld dit artikel voor meer achtergrond over matrices.) Bij de vermenigvuldiging van twee van zulke tabellen, hangt het eindantwoord af van de volgorde waarin ze worden vermenigvuldigd. Dat de volgorde van bepaalde operaties verschil maakt voor het eindresultaat weten we uit het dagelijks leven: eerst je sokken en dan je schoenen aantrekken geeft een iets ander resultaat dan de omgekeerde volgorde. Dat de volgorde van gewone getallen vermenigvuldigen *niet* uitmaakt is dus eigenlijk heel bijzonder!



Afbeelding 3. Paul Dirac. Links: een foto van de natuurkundige Paul Dirac in Jim Al-Khalili's 'Everything and Nothing' op BBC Four. Rechts: Een plakkaat in Westminster Abbey met daarop de Diracvergelijking, ter nagedachtenis aan Dirac. Foto links: John Keogh. Foto rechts: Stanislav Kozlovskiy.

Om de volledige set van voorwaardes op te lossen moest Dirac aannemen dat de coëfficiënten vierkante matrices waren met een totaal van vier rijen en vier kolommen. Deze vier-bij-viermatrices worden tegenwoordig ook wel de *gammamatrices* genoemd, en aangeduid met het Griekse symbool γ (spreek uit: 'gamma'). De oplossing die Dirac had gevonden was dus geen gewone vergelijking zoals Klein en Gordon hadden gevonden, maar een *matrixvergelijking*. De uiteindelijke vorm van de Diracvergelijking ziet er als volgt uit:

$$(i \gamma^\mu \partial_\mu + m) \psi = 0,$$

met ψ de golffunctie van het elektron. De som over afgeleides – die cruciaal was in het vinden van de juiste formule – is hierboven in verkorte vorm opgeschreven door een conventie te gebruiken die van Einstein afkomstig is:

$$\gamma^\mu \partial_\mu = \gamma^x \partial_x + \gamma^y \partial_y + \gamma^z \partial_z + \gamma^t \partial_t.$$

Na een hoop ingewikkelde wiskunde – die je hopelijk niet te veel heeft afgeschrikt – is het eindresultaat verbluffend elegant: een ogenschijnlijk simpele formule die twee heel verschillende takken van de natuurkunde, van het heel kleine en het heel snelle, verenigt. Tot ieders opwinding was de Diracvergelijking in staat om nog nauwkeuriger de gemeten

spectraallijnen van het waterstofatoom te reproduceren: daarmee was het probleem van het *relativistische* elektron opgelost.

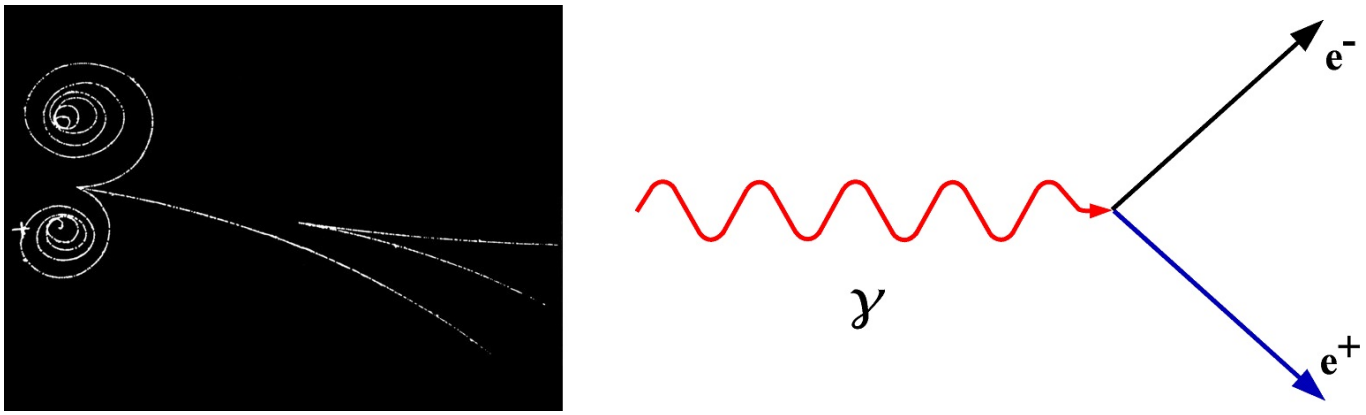
Antideeltjes?

De vergelijking die Dirac had opgeschreven leidde echter direct tot een grote verwarring. Door het gebruik van de gammamatrices had zijn vergelijking niet *twee* oplossingen – die de twee spintoestanden van het elektron beschreven – maar wel *vier*. Dit resultaat was verontrustend: het duidde op het bestaan van een nieuw deeltje met óók twee spintoestanden, dat precies dezelfde massa had als het elektron, maar met een tegengestelde – in dit geval dus positieve – lading. Op dat moment was er echter maar één elementair deeltje bekend met tegengestelde lading aan die van het elektron – het *proton* – en protonen en elektronen zijn juist heel verschillend: om te beginnen is een proton zo'n tweeduizend keer zwaarder dan een elektron! In een wanhoopspoging probeerde Dirac te beargumenteren dat het nieuwe deeltje toch een proton was – en dat de extra massa te wijten was aan interacties met andere deeltjes. Al snel bleek dat deze suggestie niet kon kloppen, en Diracs voorspelde nieuwe deeltje – dat hij het *anti-elektron* noemde – bleef voor minstens een paar jaar een groot raadsel.

In 1932 was het dan eindelijk raak: in straling vanuit het heelal werd een nieuw soort deeltje ontdekt dat precies dezelfde massa had als het elektron, maar een positieve lading. Met de ontdekking van het *positron* (een verkorting van 'positief elektron') werd Diracs voorspelling bevestigd. In 1933 ontving hij samen met Erwin Schrödinger de nobelprijs in de Natuurkunde. Tegenwoordig noemen we het positron het *antideeltje* van het elektron, omdat we weten dat het principe dat Dirac had gevonden op vrijwel ieder elementair deeltje in de natuur van toepassing is. Protonen hebben antiprotonen, en zelfs neutrale deeltjes, zoals neutronen, hebben een antipartner. Wanneer een deeltje met zijn antipartner botst worden beide *geannihileerd*, en wordt de totale massa van het deeltje en antideeltje omgezet in een hoeveelheid energie die gegeven wordt door Einsteins beroemde massa-energierelatie $E = m c^2$.

Vandaag de dag worden in experimenten – denk bijvoorbeeld aan de grote deeltjesversneller LHC in Genève – constant antideeltjes gemaakt. Bij natuurlijk radioactief verval worden ook vaak antideeltjes geproduceerd. Een tot de verbeelding sprekend voorbeeld – dat om

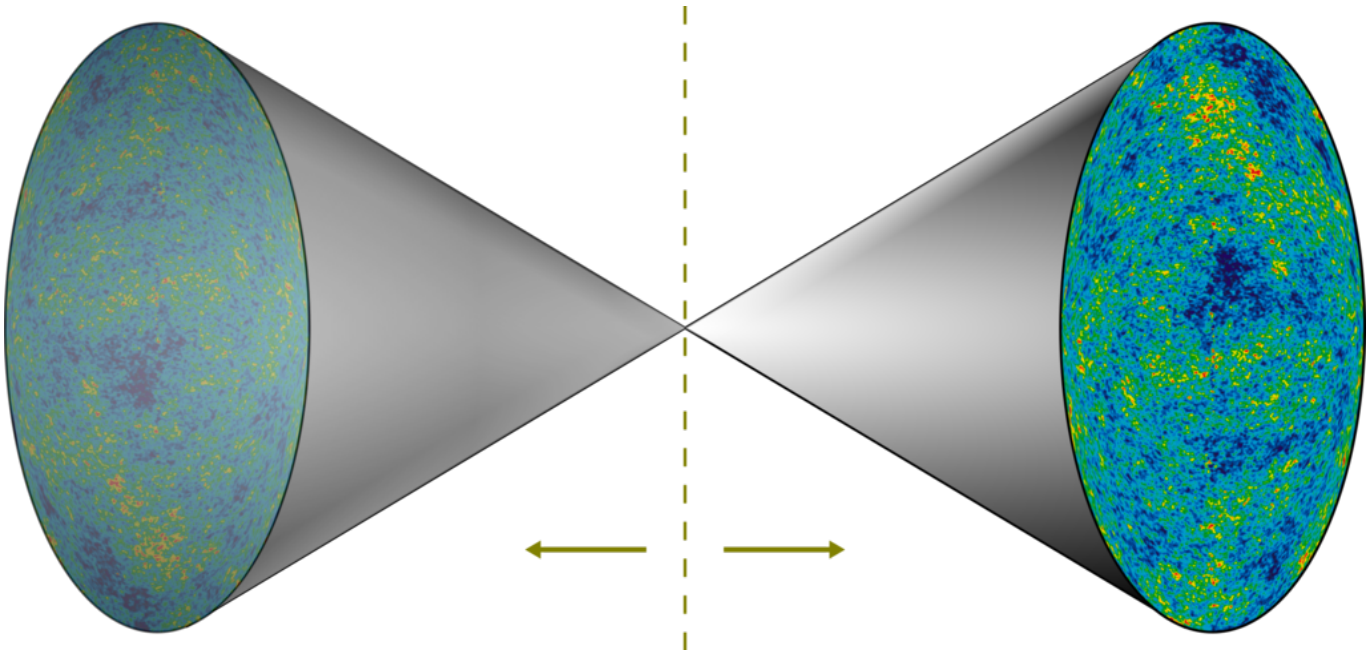
onduidelijke reden het internet is gaan domineren – is een banaan: door het relatief hoge gehalte van de radioactieve isotoop kalium-40 produceert zo'n stuk fruit zo nu en dan een positron dat meteen weer wordt vernietigd zodra het in contact komt met gewone materie. Ook in medische toepassingen zijn antideeltjes niet meer weg te denken: de zogenaamde PET-scan (*positron*emissietomografie) wordt in ziekenhuizen gebruikt als beeldvormende techniek, en maakt gebruik van positron-elektronannihilaties waarbij kleine lichtflitsen vrijkomen die vervolgens kunnen worden waargenomen. Het proces kan ook andersom plaatsvinden: uit hoogenergetische straling kan spontaan een positron-elektronpaar ontstaan, zoals weergeven in afbeelding 4.



Afbeelding 4. Vorming van een elektron-positronpaar. Links: de vorming van een positron-elektronpaar vanuit gammastraling in een nevelkamer – een instrument waarmee sporen van kleine deeltjes (bijvoorbeeld elektronen) zichtbaar gemaakt kunnen worden. De gammastraling komt van links en is niet zichtbaar, maar zorgt plots voor het ontstaan van twee spiraalvormige lijntjes die de baan van een positron en elektron zijn. Het feit dat ze beide een andere kant op draaien geeft aan dat de deeltjes tegengestelde lading hebben. Het derde, rechtere lijntje is een los elektron dat door het proces is losgeslagen uit een atoom dat al aanwezig was in de nevelkamer. Een tweede positron-elektronpaar wordt meer rechts gemaakt, zonder extern atomair elektron, waardoor beide deeltjes een hogere snelheid hebben dan in het proces links. Rechts: een schematische weergave van hetzelfde proces. Foto links: U.S. National Archives.

Het is wetenschappers zelfs gelukt om een antiproton en een positron samen te voegen in een stabiel antiwaterstofatoom. Omdat antideeltjes zich – theoretisch gezien – hetzelfde gedragen als gewone deeltjes zou een universum gemaakt van antimaterie – een *antiuniversum*! – net zo goed mogelijk zijn volgens de natuurwetten als een universum

gemaakt van materie. Wellicht dat er in uithoeken van ons heelal, ver buiten ons gezichtsveld, plekken zijn waar antimaterie dominant is, en de sterrenhemel bestaat uit antisterren en antisterrenstelsels. Je kunt je, als gewone materie wel overal dominant is, ook afvragen waarom we eigenlijk in een universum wonen dat daardoor gedomineerd wordt. Als er tijdens de oerknal gelijke hoeveelheden materie en antimaterie zijn gemaakt, waar is alle antimaterie dan gebleven? En waarom hebben beide elkaar bij het ontstaan niet volledig geannihileerd? Deze asymmetrie tussen materie en antimaterie is nog steeds een groot raadsel binnen de huidige natuurkunde, en heeft bij enkele natuurkundigen tot een speculatief idee geleid dat er tijdens de oerknal – tegelijkertijd met het ontstaan van ons eigen universum – een antiuniversum is ontstaan dat zich bovendien terug in de tijd heeft ontwikkeld!



Afbeelding 5. Een antiuniversum. De tijd is in dit plaatje van links naar rechts getekend. Naast het ontstaan van ons eigen universum, dat grotendeels uit materie bestaat, (uitdijing naar rechts), zou er volgens een speculatief idee bij de oerknal wellicht ook een antiuniversum (uitdijing naar links) zijn ontstaan dat door antimaterie wordt gedomineerd en zich terug in de tijd heeft ontwikkeld. Afbeelding: Eduemoni.

Samenvattend: we hebben gezien hoe de quantummechanica en speciale relativiteit kunnen worden verenigd in de Diracvergelijking voor het relativistische elektron. Om aan alle eisen te voldoen, moest Dirac aannemen dat de coëfficiënten van de vergelijking geen gewone getallen, maar matrices waren. Met een verassend gevolg: de vergelijking had meer

oplossingen dan Dirac had verwacht, wat hij interpreteerde als bewijs voor het bestaan van een nieuw deeltje met dezelfde massa, maar tegengestelde lading als het elektron: het anti-elektron. Tegenwoordig is antimaterie niet weg te denken uit de natuurkunde: het speelt bijvoorbeeld een belangrijke rol in processen als radioactiviteit, maar ook in ons begrip van het ontstaan van ons universum – dat bijna volledig uit materie bestaat. Wellicht dat er op dit moment in een universum gemaakt uit antimaterie – door een antiversie van jouzelf – een anti-artikel wordt gelezen over gewone materie.

---

[1] Daarnaast vind je de normalisatie $A^2 = B^2 = C^2 = D^2 = 1$.