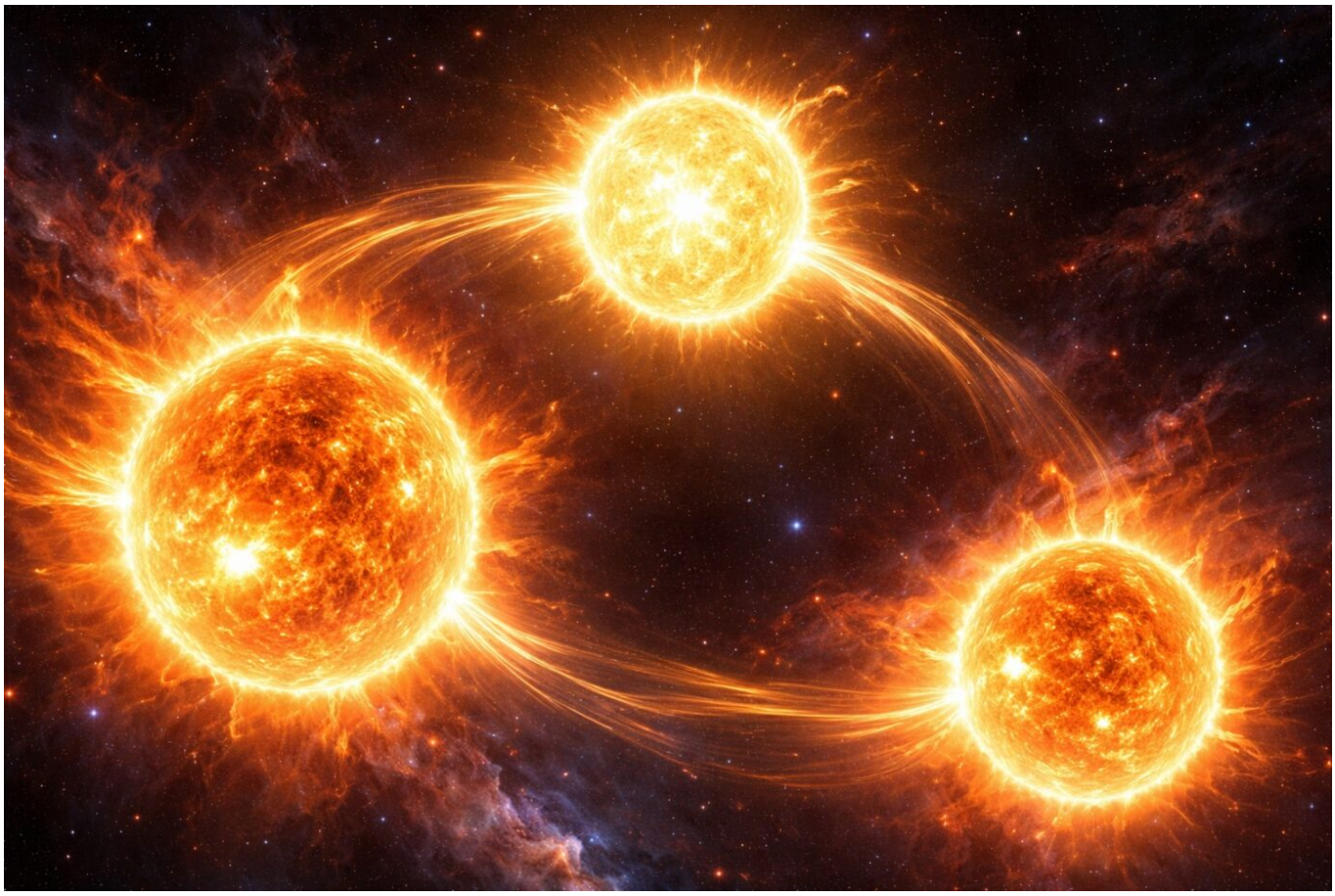
Het drielichamenprobleem: chaos in de kosmos

In het boek “Het drielichamenprobleem” beschrijft auteur Cixin Liu een bijzonder astronomisch probleem. Drie sterren bewegen in onvoorspelbare banen om elkaar heen en zorgen voor klimaatcatastrofes op omliggende planeten. Hoe je het ook bekijkt, er is geen manier om te voorspellen hoe de sterren zullen bewegen. Het boek en de Netflixserie die erover gemaakt is, zijn science-fiction. Er zijn, voor zover bekend is, geen zonnestelsels waarin drie sterren op dezelfde manier als in het boek om elkaar heen tollen. Toch is de situatie die in het boek wordt geschetst minder fictief dan je zou denken.



Vergelijkingen van 300 jaar geleden, oplossingen van vandaag

Een combinatie van drie sterren of planeten die met hun zwaartekracht elkaars beweging beïnvloeden staat ook wel bekend als een *drielichamensysteem*. Hoe zulke hemellichamen kunnen bewegen en hoe je deze beweging kunt voorspellen, is een eeuwenoud vraagstuk waar veel wetenschappers zich over hebben gebogen. Hoe kun je de individuele beweging van de hemellichamen in het zwaartekrachtsveld wiskundig beschrijven? De zoektocht naar het antwoord op deze vraag voor N van zulke hemellichamen staat bekend als het N-lichamenprobleem.

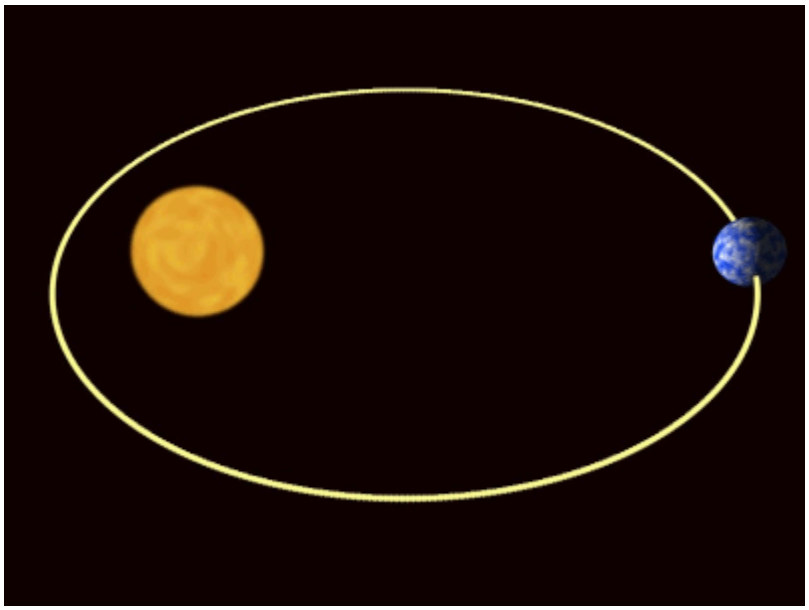
Het *twee*lichamenprobleem is in de tweede helft van de 17de eeuw door de Engelse wetenschapper Isaac Newton al opgelost. Zijn bekende theorie over zwaartekracht kon hij gebruiken om te beschrijven hoe de zwaartekracht tussen twee hemellichamen hun beweging beïnvloedt. De tweede wet van Newton zegt dat de kracht gelijk is aan de massa maal de versnelling. Die versnelling is dan weer de tweede afgeleide van de positie naar de tijd (een leuk feitje dat soms niet duidelijk wordt gemaakt op school). Een vertaling van dit principe naar het tweelichamenprobleem levert daarmee de volgende twee vergelijkingen op:

$$F_{21} = m_1 x''_1(t)$$
$$F_{12} = m_2 x''_2(t)$$

Waar F_{21} (respectievelijk F_{12}) de kracht is die het tweede lichaam op het eerste uitoefent (respectievelijk het eerste op het tweede). Bovendien zegt de derde wet van Newton dat krachten altijd optreden in paren; in dit geval geldt er dus dat $F_{12} = -F_{21}$.

Met deze drie vergelijkingen kon Newton wiskundig bewijzen dat de banen van twee hemellichamen, bijvoorbeeld de aarde en de zon, ellipsen zijn; een wet die voor planeten al in 1607 empirisch geformuleerd was door Johannes Kepler. De kracht van de oplossing van Newton is dat je een exacte wiskundige formule hebt die de relatieve positie van de twee lichamen geeft voor *alle beginwaarden*! Met de term beginwaarden bedoelen we de posities en snelheden op één vooraf gekozen moment. Hoe zit het nu als je naar meer dan twee

hemellichamen gaat kijken? Bij drie hemellichamen, bijvoorbeeld, komt er een aantal vergelijkingen bij, en helaas werkt het argument dat Newton had gebruikt niet meer en vind je geen eenvoudige ellipsbanen. Het blijkt dat het probleem aanzienlijk moeilijker wordt wanneer er een derde object komt meespelen. Wiskundigen moesten weer aan de bak. Driehonderd jaar later blijft dit nog altijd een heel actief onderzoeksveld, zowel binnen de wiskunde als binnen de sterrenkunde.

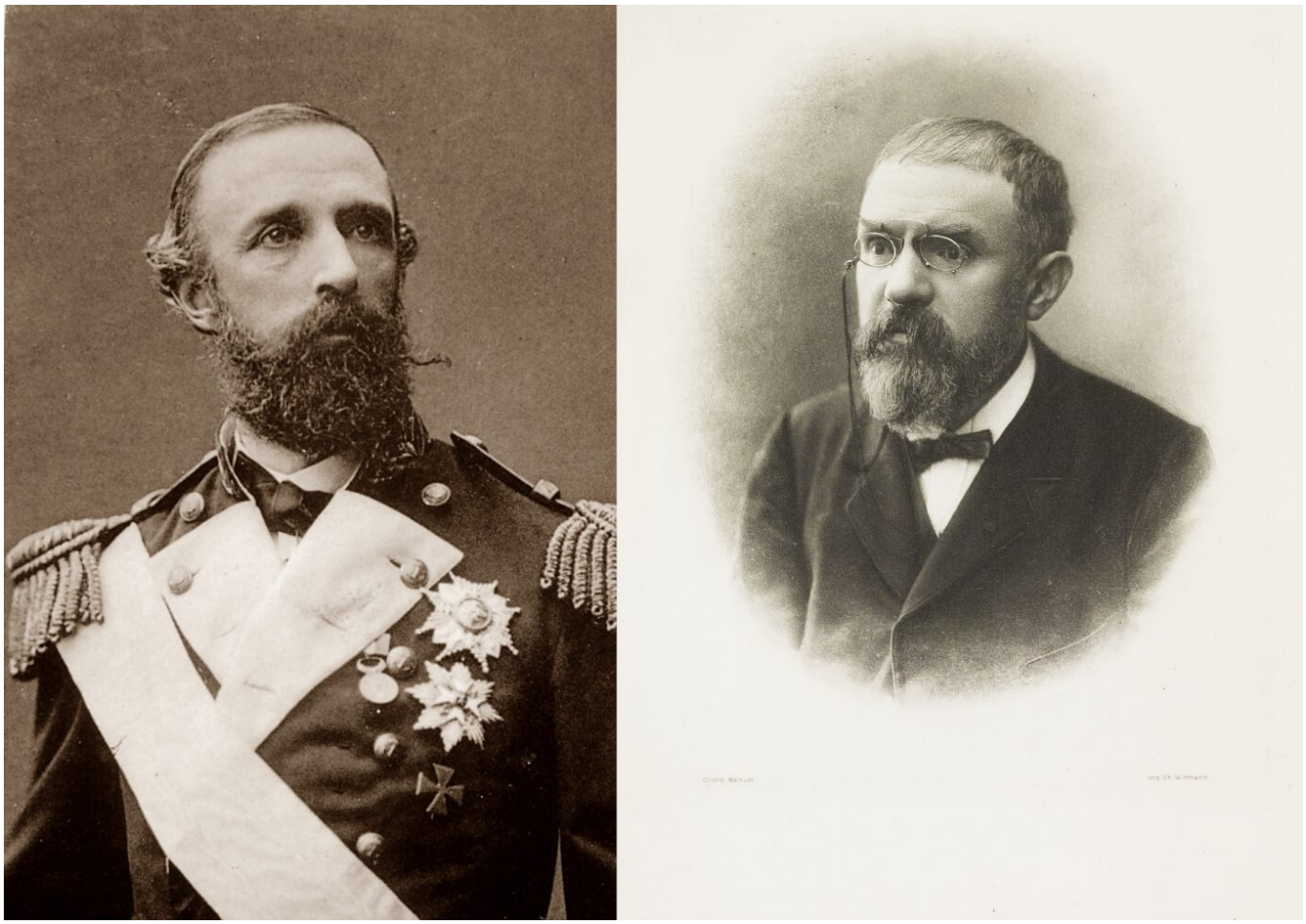


De eerste wet van Kepler. De eerste wet van Kepler zegt dat planeten rond de zon bewegen in ellipsen. Bekijk ook deze video om meer te leren hierover. Animatie: WillowW, via Wikimedia Commons.

Eén vergelijking erbij en alles stort in

De interesse in het drielichamenprobleem kwam voort uit de wens om de beweging van de zon, aarde en maan te begrijpen. Mensen hoopten met behulp van de beweging van de maan te kunnen navigeren, zodat schepen hun locatie op aarde nauwkeurig konden bepalen. Een bekende poging om het drielichamenprobleem volledig op te lossen, werd georganiseerd naar aanleiding van de 60e verjaardag van Koning Oscar II van Zweden in 1885. Voor zijn verjaardag organiseerde de koning een wedstrijd om het populaire vraagstuk eens en voor altijd op te lossen. De winnaar kreeg de kans om zijn oplossing te laten publiceren. De Franse wiskundige Henri Poincaré dacht een mooie wiskundige beschrijving te hebben gevonden, zoals die van Newton voor het tweelichamenprobleem, en werd uitgeroepen tot de winnaar

van de prijsvraag. Vlak voordat zijn oplossing zou worden gepubliceerd, kwam hij er echter achter dat er een fout in zijn uitwerking zat. Wat bleek? De uitkomst van zijn drielichamensysteem was zó afhankelijk van de beginwaarden van de berekening – dus van de posities en de snelheden van de drie hemellichamen op het gekozen startmoment – dat een kleine verandering hierin ervoor zorgde dat de voorspellingen van wat er in de toekomst ging gebeuren radicaal veranderden. Poincarés nieuwe oplossing bleek compleet chaotisch!



Koning Oscar II van Zweden en Henri Poincaré. Koning Oscar II van Zweden en Henri Poincaré. Afbeeldingen via Wikimedia Commons.

Poincaré gaf zijn fout toe, en schreef zo snel mogelijk een nieuwe publicatie. Hierin beschreef hij dat de beweging van de hemellichamen chaotisch en dus onmogelijk te voorspellen was, omdat men de beginvoorwaarden nooit met genoeg nauwkeurigheid zou kunnen weten. Poincaré had daarmee bewezen dat het onmogelijk is om een algemene wiskundige formule te vinden die alle oplossingen van het drielichamenprobleem kan beschrijven. Een indrukwekkende tegenstelling tot het tweelichamenprobleem van Newton, waar zo'n formule wel bestaat. De wiskunde geeft ons dus de kracht om te bewijzen dat sommige dingen niet

kunnen bestaan! Poincarés beschrijving heeft hiermee de basis gelegd voor de overkoepelende theorie van onvoorspelbare systemen: chaostheorie.

De Nederlandse wiskundige en emeritus-hoogleraar Ferdinand Verhulst, verbonden aan de Universiteit Utrecht, gaf in 2013 een lezing voor leraren in het kader van de jaarlijkse vakantiecursus. Hij schreef het volgende over het werk van Poincaré:

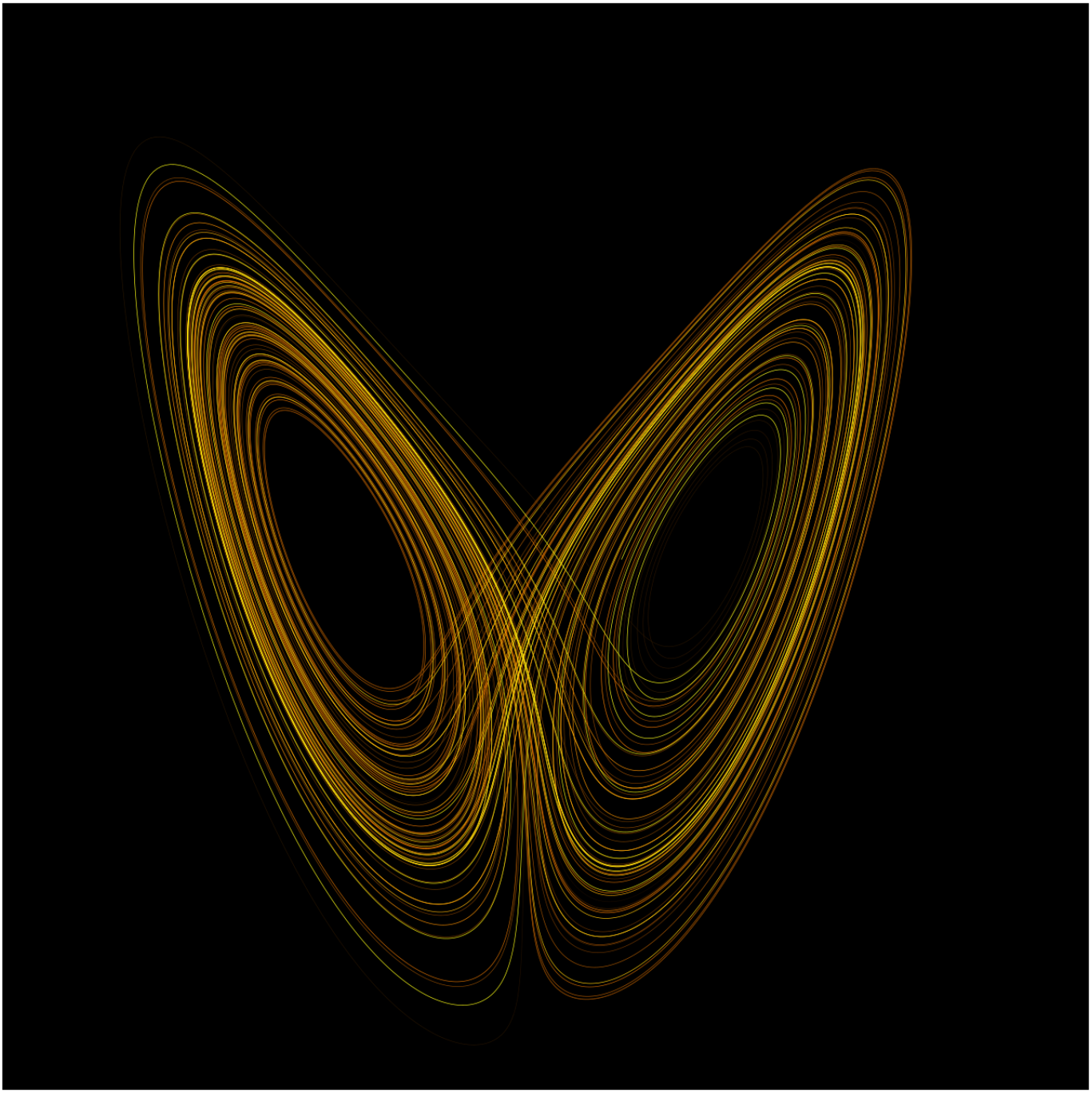
> *In de drie delen van zijn Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste (1892-1899) ontwikkelde Poincaré daarna systematisch de theorie van dynamische systemen waarin steeds meetkundige en analytische methoden elkaar afwisselen en aanvullen. In deel drie beschrijft Poincaré in detail hoe deze complexe dynamica, die we nu chaotisch noemen, tot stand komt. Die beschrijving van oplossingen in het drielichamenprobleem is heel beeldend, het is voor moderne onderzoekers niet te begrijpen hoe hij zonder computer tot dit inzicht kwam. Meestal beoefende men de meetkunde in het vlak of in de drie-dimensionale ruimte. Het onderzoek aan het drielichamenprobleem maakte het noodzakelijk om na te denken over de structuur van oppervlakken in meerdimensionale ruimtes.*

Hoe een vlinder in Tokyo een storm kan veroorzaken in New York

Een systeem dat in de loop van de tijd verandert noemen we een *dynamisch systeem*. Aan de hand van formules wordt de verandering van het systeem beschreven, om zo uit te rekenen hoe het systeem er later uit zal zien. Zulke systemen worden beïnvloed door veel verschillende factoren. Zo kan hun ontwikkeling afhangen van beginposities, beginsnelheden, massa's of invloeden van buitenaf. In sommige gevallen zorgt een kleine verandering in de beginwaarden van het systeem ervoor dat de eindtoestand compleet anders wordt. Als dat gebeurt noemen we het systeem een *chaotisch* dynamisch systeem.

Denk bijvoorbeeld aan de weersvoorspelling van de komende weken. Het is onmogelijk om het weer na 14 dagen met goede precisie te voorspellen. Dit komt doordat de wiskundige modellen die hiervoor worden gebruikt chaotisch gedrag vertonen. Een bekende metafoor uit de chaostheorie is het zogeheten *butterfly effect* (vlindereffect). Een kleine vleugelbeweging

van een vlinder in Tokyo kan in theorie de luchtstromen zo beïnvloeden dat die uiteindelijk een grote storm veroorzaakt in New York. Oftewel: een *microscopische verandering* in de beginwaarden kan uiteindelijk uitgroeien tot een *macroscopische verandering*.



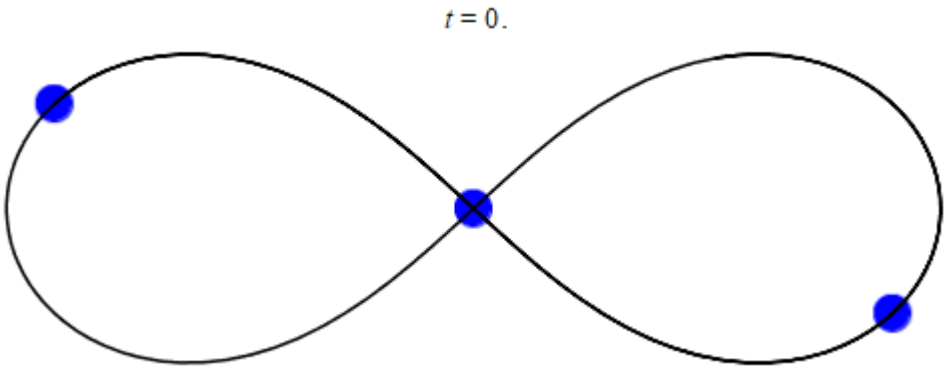
De Lorenz-attractor. De term butterfly effect werd geïnspireerd door de Lorenz-attractor, een stelsel van drie vergelijkingen dat werd geformuleerd door Edward Lorenz om atmosferische fenomenen te modelleren. Afbeelding: Wikimol, Dschwen, via Wikimedia Commons.

Fictieve maar mogelijke werelden

Poincarés bewijs dat het onmogelijk is om een algemene formule te vinden die alle oplossingen van het drielichamenprobleem beschrijft, had een kleine existentiële crisis veroorzaakt bij wiskundigen, want ze waren niet zo gewend aan het feit dat zelfs de wiskunde haar grenzen kent. De wereld is veel te spannend en complex om alles met één formule te kunnen beschrijven. Aangezien het onmogelijk bleek om alle oplossingen in een exacte formule te vatten, besloten wiskundigen zich te focussen op *periodieke* en *stabiele* oplossingen.

“Periodiek” houdt in dat de drie lichamen steeds in dezelfde vorm blijven bewegen. Eens in de zoveel tijd zullen de drie lichamen weer op dezelfde plek staan ten opzichte van elkaar als op een eerder moment. “Stabiel” wil zeggen dat het systeem een piepkleine verstoring van de precieze posities en snelheden wel aan kan. Na een tijdje wiebelen komt het systeem weer terecht in de oorspronkelijke samenstelling. Deze stabiliteit is echter zo gevoelig, dat in de praktijk elke verstoring al te groot is, en de balans nooit meer terugkeert.

De beweging van de drie sterren in het boek “Het drielichamenprobleem” is ook een voorbeeld van een dynamisch systeem; het is zelfs een echte wiskundige oplossing van het drielichamenprobleem! Een specifieke oplossing van het drielichamenprobleem, gevonden door Amerikaanse wiskundige Richard Montgomery, is de inspiratie geweest voor het boek van Cixin Liu: *de figure-eight-baan*. Deze oplossing is periodiek en stabiel.



Een periodieke baan. Drie gelijke massa’s die bewegen volgens de figure-eight-baan. Animatie: MaxwellMolecule, via Wikimedia Commons.

In een artikel voor de American Mathematical Monthly in 2000 schreef Montgomery:

> Carles Simó (wiskundige aan de universiteit van Barcelona) heeft met gebruik van benaderingen kunnen laten zien dat de figure-eight-baan stabiel is. Dit is verrassend, want we kennen op dit moment heel weinig stabiele periodieke banen van het drielichamenprobleem, en nog minder voor het geval van drie gelijke massa's!

In de afgelopen twintig jaar zijn er nog duizenden oplossingen gevonden voor het drielichamenprobleem, vooral dankzij de enorme kracht van moderne computers en efficiëntie van algoritmes.

Periodieke, stabiele banen. Een aantal periodieke en stabiele oplossingen van het 3-lichamenprobleem voor drie gelijke massa's. Animatie: Perosello, via Wikimedia Commons.

Natuurlijk blijft dit probleem een inspiratiebron voor avonturen en verhalen zoals in het boek van Cixin Liu. Hij schrijft in zijn voorwoord:

> *Ik heb het gevoel dat de grootste pracht van science fiction ligt in de creatie van talloze werelden buiten de realiteit.*

Maar wat motiveert wetenschappers om nog onderzoek te doen aan dit probleem? Is het alleen een jacht op nog meer oplossingen geworden? Als we nog iets verder lezen in het artikel van Montgomery dan lezen we iets heel bijzonders, namelijk:

> Bezien vanuit een fysisch perspectief, houdt stabiliteit in dat er een kans bestaat dat de figure-eight baan in het echt zou kunnen bestaan in een zonnestelsel ergens in het universum. Deze stabiliteit is wel heel gevoelig, wat betekent dat deze kans heel klein is. Computationele benaderingen die zijn gemaakt door Douglas Heggie in 2020 suggereren dat de kans dat er drie sterren bestaan die in de figure-eight baan bewegen tussen "1 per sterrenstelsel" en "1 per universum" ligt.

Stabiele oplossingen voor het drielichamenprobleem zouden dus ook in de praktijk kunnen

bestaan, maar door de gevoeligheid voor kleine verstoringen in de beweging is deze kans heel klein. We zullen dus niet snel een zonnestelsel tegenkomen waar drie sterren in een perfecte baan om elkaar heen draaien volgens één van de stabiele oplossingen, zoals de figure-eight oplossing van Montgomery of bijvoorbeeld de zogeheten gelijkzijdigedriehoekoplossing die door Lagrange werd gevonden. Toch worden er aan de lopende band nieuwe stabiele oplossingen gevonden door te blijven proberen het drielichamensysteem op te lossen. Dit wordt gedaan met numerieke methoden. Dat betekent dat wetenschappers met computers bijna alle mogelijke bewegingen doorrekenen tot ze er eentje tegenkomen die stabiel blijkt te zijn.

Terug naar ons eigen zonnestelsel

Maar wat betekent dit allemaal voor ons en voor de manier waarop we naar de kosmos kijken? Bevinden we ons in een zonnestelsel waarin de beweging van onze planeten rond de zon fragiel is? Om antwoorden te vinden op deze vragen en wat geruststelling te vinden over de toekomst van ons zonnestelsel ging ik langs wetenschapper Matthieu Schaller, die onderzoek doet in numerieke kosmologie aan het Lorentz Instituut voor theoretische natuurkunde en de Sterrewacht Leiden. Matthieu werkt aan computersimulaties van het heelal. Met deze simulaties probeert hij te begrijpen hoe het universum is ontstaan na de oerknal.

“Het drielichamenprobleem is een heel interessant probleem, want het is onmogelijk om alle oplossingen in een formule te vatten – alhoewel de onderliggende principes heel goed begrepen zijn. Deze principes zijn namelijk door Newton geformuleerd. In veel gevallen kunnen we heel goed werken met deze vergelijkingen. We gebruiken ze bijvoorbeeld om raketten met hoge nauwkeurigheid te laten landen op Mars. Maar het blijft onmogelijk om het probleem exact op te lossen. En het wordt nog ingewikkelder als je naar het zonnestelsel kijkt, want dan heb je te maken met het 9-lichamenprobleem. Om de oplossingen van deze vergelijkingen te benaderen met de huidige methoden, hebben we metingen nodig van de beginwaarden, gegeven door bijvoorbeeld de huidige posities en snelheden van de zon en de acht planeten in het zonnestelsel. Kleine afwijkingen in deze metingen kunnen echter tot compleet andere oplossingen leiden. We weten bijvoorbeeld nog niet of ons zonnestelsel altijd stabiel zal blijven. Voor de komende honderd miljoen jaar weten we het gelukkig wel, dankzij simulaties en de wiskundige technieken die we hebben ontwikkeld. Tot die tijd zijn we

dus veilig! Maar wat na een paar miljard jaar gebeurt, weten we niet.”

In 1989 heeft de beroemde Franse astronoom Jacques Laskar uitgerekend dat het zonnestelsel chaotisch gedrag vertoont en dat het bijna onmogelijk is om de toestand van het zonnestelsel na 100 miljoen jaar precies te voorspellen. In een belangrijke vervolgstudie uit 2009 hebben Laskar en M. Gastineau numerieke simulaties gemaakt van het zonnestelsel voor de komende vijf miljard jaar. Ze hebben gevonden dat in 1% van de uitgerekende banen de eccentriciteit van Mercurius zodanig verandert dat de planeet kan botsen met Venus, de zon of zelfs met de Aarde!

Naast het vinden van oplossingen met de computer wordt door wiskundigen ook geprobeerd het gedrag van dynamische systemen theoretisch te begrijpen, Nederland is ook heel sterk hierin. De al eerder genoemde Utrechtse wiskundige Ferdinand Verhulst heeft jarenlang onderzoek gedaan aan dynamische systemen, chaostheorie, en complexere varianten van het tweelichamenprobleem. Het Mathematisch Instituut van de Universiteit Utrecht maakte in september 2024 bekend dat ScholarGPS heeft vastgesteld dat Verhulst wereldwijd tot de 20 belangrijkste onderzoekers behoort op de subdiscipline dynamische systemen.

Onderzoek op het gebied van dynamische systemen en chaostheorie is niet alleen relevant voor sterrenkundigen die zonnestelsels beschrijven. Ook biologen, wiskundigen, ecologen en andere wetenschappers zijn bezig te begrijpen hoe chaotische systemen zich kunnen gedragen. Chaostheorie verbindt al deze velden van wetenschap. Waar er jarenlang is gezocht naar steeds nauwkeurigere beschrijvingen van de wereld om ons heen, van de kleinste cellen en microscopische lichamen tot het leven van sterren, blijkt nu door chaostheorie dat veel van deze dingen in de praktijk onvoorspelbaar zijn. Juist door alles op een grotere schaal te bekijken kunnen we heel veel leren over hoe chaotisch de wereld zich kan gedragen.