# Het eind van de quantumtunnel

**Quantummechanische verschijnselen zoals radioactief verval, of algemener: ‘tunnelen’, vertonen intrigerende wiskundige patronen. Een veertig jaar oude wiskundige ontdekking kan gebruikt worden om die structuur volledig te beschrijven en te begrijpen.**



**Licht aan het einde van de quantumtunnel.** Foto: Meg Nicol (CC BY-NC-ND 2.0 Deed).

## Quantumfysica – eenvoudig én moeilijk

In de quantumwereld kunnen processen worden onderverdeeld in twee groepen. Eén groep, die van de zogeheten ‘perturbatieve’ verschijnselen, kun je betrekkelijk eenvoudig detecteren – zowel in experimenten als in een wiskundige berekening. Voorbeelden zijn er te over: het licht dat atomen uitzenden, de energie die zonnecellen produceren, de toestanden

van qubits in een quantumcomputer. Deze quantumverschijnselen hangen af van de constante van Planck, de fundamentele natuurconstante die bepaalt hoe de quantumwereld verschilt van onze grootschalige wereld – maar op een heel eenvoudige manier. Ondanks het feit dat Plancks constante belachelijk klein is – uitgedrukt in alledaagse eenheden van kilogrammen, meters en seconden begint de waarde ervan op het $34^{e}$ cijfer achter de komma – is het feit dat de constante niet *precies* nul is voldoende om aan dergelijke quantumverschijnselen te kunnen rekenen.

Daarnaast zijn er de 'niet-perturbatieve' verschijnselen. Een van de bekendste is radioactief verval: een proces waarbij elementaire deeltjes dankzij quantumeffecten kunnen ontsnappen aan de aantrekkende kracht die ze aan atoomkernen bindt. Als de wereld 'klassiek' zou zijn – dat wil zeggen: als de constante van Planck precies nul zou zijn – zou het onmogelijk zijn om die aantrekkende kracht te overwinnen. In de quantumwereld komt verval wél voor, maar nog steeds maar heel sporadisch; een enkel uraniumatoom zou er bijvoorbeeld gemiddeld meer dan vier miljard jaar over doen om te vervallen. De collectieve naam voor zulke zeldzame quantumgebeurtenissen is 'tunnelen': om te kunnen ontsnappen moet het deeltje als het ware een 'tunnel graven' door de energiebarrière die het aan de atoomkern bindt. Een tunnel waarvan het graven miljarden jaren duurt – de Shawshank Redemption is er niets bij.

## Wiskunde biedt redding

Ook wiskundig zijn niet-perturbatieve quantumeffecten veel moeilijker te beschrijven dan de perturbatieve varianten. Desondanks hebben natuurkundigen in de eeuw dat de quantummechanica nu bestaat allerlei manieren gevonden om met zulke effecten om te gaan, en om ze nauwkeurig te beschrijven en voorspellen. "Toch was er in dit honderd jaar oude probleem nog wel nuttig werk te verrichten", zegt Alexander van Spaendonck, een van de auteurs van de nieuwe publicatie. (En, inderdaad, redacteur van onze website!) "De verschillende beschrijvingen van tunnelverschijnselen in de quantummechanica vroegen om unificatie – een raamwerk waarin al die verschijnselen aan de hand van een enkele wiskundige structuur beschreven en onderzocht kunnen worden."

Verrassend genoeg werd die structuur gevonden in veertig jaar oude wiskunde. In de jaren tachtig had de Franse wiskundige Jean Écalle een raamwerk opgezet dat hij *resurgence*

noemde, en dat precies dit doel had: structuur geven aan niet-perturbatieve verschijnselen. Waarom duurde het dan veertig jaar voordat de combinatie van Écalles formalisme en de toepassing op quantumverschijnselen tot een logisch eindpunt werd doorgetrokken? Marcel Vonk, de andere auteur van de publicatie (en, inderdaad, hoofdredacteur van deze site), legt uit: “De oorsponkelijke artikelen van Écalle waren lang – samen meer dan duizend pagina’s – flink technisch, en werden alleen in het Frans gepubliceerd. Het duurde daardoor tot halverwege de jaren 2000 voordat voldoende natuurkundigen bekend waren met de gereedschappen van de resurgence. Oorspronkelijk werden Écalles ideeën vooral toegepast op eenvoudige ‘toy models’, maar natuurlijk werd ook geprobeerd om ze voor de echte quantummechanica te gebruiken. Ons werk trekt die ontwikkelingen door tot hun logische conclusie.”

## Prachtige structuur

Die conclusie is dat een van Écalles gereedschappen, de ‘transserie’, perfect geschikt is om tunnel-verschijnselen te beschrijven – in principe in *elk* quantummechanisch probleem – en dat dat altijd op precies dezelfde manier kan. Door de wiskundige details uit te werken, ontdekten de auteurs dat het niet alleen mogelijk was om alle tunnel-verschijnselen in een enkel wiskundig object te verenigen, maar dat ze ook bepaalde ‘sprongen’ in de grootte van de rol van deze fenomenen konden beschrijven – een effect dat bekend staat als Stokes’ fenomeen.

Van Spaendonck: “Met onze beschrijving van Stokes’ fenomeen konden we laten zien dat bepaalde ambiguïteiten die de ‘klassieke’ rekenmethodes voor niet-perturbatieve effecten altijd hadden geteisterd – oneindig veel, zelfs – allemaal wegvielen in onze berekeningen. De onderliggende structuur bleek nog mooier dan we oorspronkelijk hadden verwacht. De transserie die de quantumtunneling beschrijft, bleek zich op verrassende wijze te splitsen – of ‘factoriseren’ – in een ‘minimale’ transserie die de basisverschijnselen van tunnelen in *elk* quantumprobleem beschrijft, en een object dat we de ‘median transseries’ genoemd hebben, dat de meer probleemspecifieke details beschrijft en bijvoorbeeld afhangt van de symmetrie van een quantumsysteem.”

Nu deze wiskundige structuur volledig is opgehelderd, is de volgende vraag natuurlijk waar de nieuwe lessen kunnen worden toegepast, en wat natuurkundigen daarvan kunnen leren.

In het geval van radioactiviteit zijn bepaalde atomen bijvoorbeeld stabiel terwijl andere kunnen vervallen. In andere natuurkundige modellen kunnen de lijsten van stabiele en instabiele deeltjes veranderen als de situatie een klein beetje verandert – een verschijnsel dat bekendstaat als wall-crossing. De onderzoekers willen nu graag met hun technieken ook dit begrip van wall-crossing verhelderen. Dat moeilijke vraagstuk is ook al door veel groepen onderzoekers op veel manieren bestudeerd, maar een soortgelijke onderliggende structuur lijkt nu binnen bereik. Er schijnt duidelijk licht aan het eind van de tunnel.

## Publicatie

*Exact instanton transseries for quantum mechanics*, Alexander van Spaendonck en Marcel Vonk. SciPost Phys. 16, 103 (2024).