Het Navier-Stokesprobleem

Op dinsdag 8 september kondigde OpenAI, het bedrijf achter ChatGPT, aan een oplossing gevonden te hebben voor een van de grootste open vraagstukken in de wiskunde: het Navier-Stokesprobleem. Dit vraagstuk, dat zijn oorsprong heeft in de natuurkunde, is een van de zeven millenniumprijsproblemen: wiskundige vraagstukken die rond de eeuwwisseling door het Clay Mathematics Institute zijn opgesteld, en waarvoor per vraag 1 miljoen dollar voor de oplossing is uitgeloofd. Tot voor kort was slechts één van de millenniumproblemen opgelost, maar nu lijkt er dus een tweede aan dat lijstje toegevoegd te kunnen worden.

Niagara Falls. De Navier-Stokesvergelijkingen worden sinds de 19e eeuw gebruikt om de

stromingen van vloeistoffen te beschrijven, maar stellen wis- en natuurkundigen nog altijd voor grote uitdagingen. Afbeelding: Sarah Jansen.

Het millenniumprijsprobleem

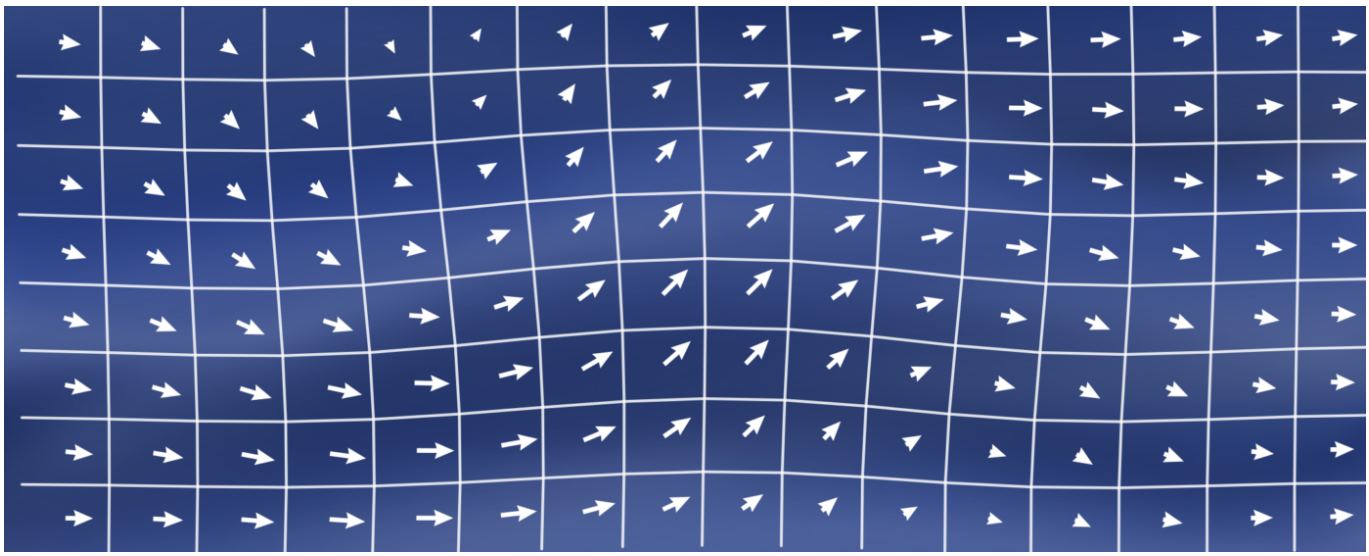
Het Navier-Stokesprobleem draait om oplossingen van de zogeheten Navier-Stokesvergelijkingen. Deze vergelijkingen beschrijven de beweging van *fluïda*: materialen die geen vaste vorm hebben, maar kunnen stromen en vervormen. Hieronder vallen vloeistoffen en gassen, maar ook plasma's en zelfs enkele vaste stoffen zoals gesteente in de aardmantel. Om het iets eenvoudiger te houden, zal ik in het vervolg schrijven over vloeistoffen, maar alles wat hieronder staat gaat ook op voor andere fluïda.

De Navier-Stokesvergelijkingen dateren uit de 19^{e} eeuw, en spelen sindsdien een sleutelrol in de beschrijving van vloeistoffen. Toch begrijpen we de vergelijkingen nog altijd niet volledig, en zijn we in de praktijk niet goed in staat de vergelijkingen op te lossen zonder gebruik te maken van benaderingen en computeralgoritmes. Met 'oplossen' bedoelen we hier dat we, gegeven een bepaalde begintoestand van een vloeistof, kunnen uitrekenen hoe die vloeistof zich op elk later tijdstip zal gedragen. En het probleem is nog groter: we weten niet eens of de vergelijkingen altijd een goede oplossing hebben, of dat er situaties zijn waarin de oplossingen vanuit een normale beginsituatie op een gegeven moment 'opblazen' en onzinnig worden. Dit laatste vormt de kern van het millenniumprobleem: gedragen oplossingen van de Navier-Stokesvergelijkingen zich altijd goed, of zijn er situaties waarin de oplossing een vloeistof beschrijft die op een gegeven moment op bepaalde plekken oneindig snel gaat stromen?

De natuurkunde achter Navier-Stokes

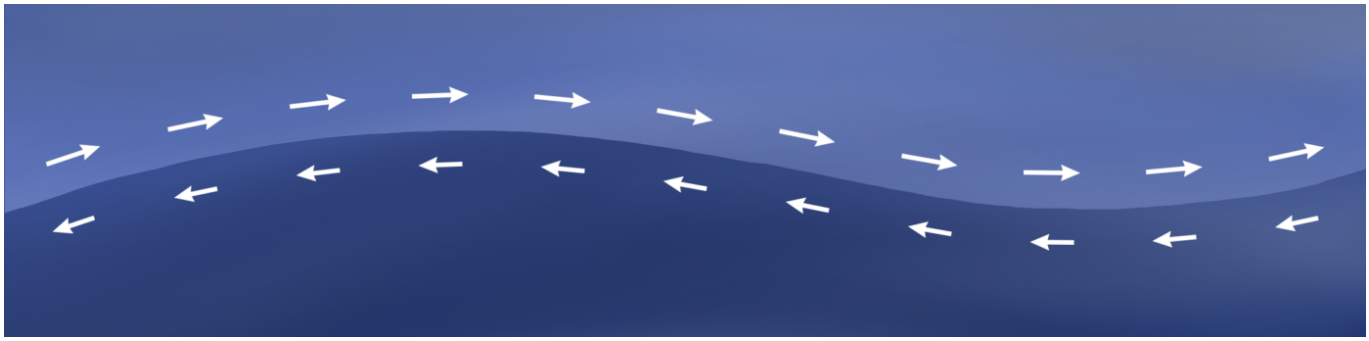
Hoewel de Navier-Stokesvergelijkingen dus lastig zijn om mee te werken, komen ze tot stand uit redelijk eenvoudige natuurkundige principes. Wiskundige Leonhard Euler was in de 18^{e} eeuw de eerste die vergelijkingen opschreef voor de beweging van vloeistoffen. Hiervoor verdeelde hij de vloeistof in piepkleine blokjes, en hield voor ieder van die blokjes bij hoe snel en in welke richting de vloeistof er stroomde. De stroming moest aan twee voorwaarden voldoen. Ten eerste *behoud van massa*: er stroomt evenveel vloeistof in als uit ieder blokje. Daarnaast moet de vloeistof voldoen aan de tweede wet van Newton: een kracht op een

blokje vloeistof, bijvoorbeeld door druk of zwaartekracht, verandert de beweging van de vloeistof.



Stroming in ‘vloeistofblokjes’. Om de beweging van vloeistoffen te beschrijven deelde Euler de vloeistof op in kleine blokjes, waarin hij de snelheid en richting van de stroming bijhield.

Tot op de dag van vandaag worden Eulers vergelijkingen veelvuldig gebruikt in de beschrijving van zogenaamde gestroomlijnde stromingen, waarbij lagen van de vloeistof soepel langs elkaar stromen. Denk bijvoorbeeld aan een rustige rivier, waarin al het water met ongeveer dezelfde snelheid dezelfde kant op stroomt. Toch zijn Eulers vergelijkingen voor de meeste vloeistoffen niet voldoende. Het missende ingrediënt werd in de 19^{e} eeuw voorgesteld door Claude-Louis Navier, en verder verfijnd tot zijn huidige vorm door George Stokes. De kern van hun idee was dat er wrijving ontstaat wanneer verschillende lagen van de vloeistof langs elkaar bewegen. Deze wrijving hangt af van de snelheid waarmee de lagen langs elkaar bewegen en van de viscositeit (‘stroperigheid’) van de vloeistof. Hoe sneller de lagen langs elkaar bewegen en hoe stroperiger de vloeistof, hoe meer wrijving er ontstaat. Meenemen van de wrijving in de wiskundige beschrijvingen leidde zo tot wat we vandaag de dag de Navier-Stokesvergelijkingen noemen.



Wrijving in vloeistoffen. Wanneer lagen vloeistof langs elkaar bewegen, veroorzaakt dit wrijving.

Turbulentie

Wat maakt de Navier-Stokesvergelijkingen dan toch zo moeilijk om op te lossen? Een belangrijke oorzaak is turbulentie: stromingen die op een zo chaotische manier veranderen, dat het vrijwel onmogelijk wordt om exacte oplossingen van de vergelijkingen te vinden. Zulke onvoorspelbare stromingen ontstaan bijvoorbeeld wanneer een vloeistof langs een obstakel stroomt. Denk aan grote keien in een rivier, die rustig stromend water veranderen in een wildwaterbaan. Wanneer water langs een kei stroomt, kan achter die kei een zogenaamde keerstroom of draaikolk ontstaan, waarin het water de andere kant op stroomt. Zo'n draaikolk kan vervolgens uiteenvallen in kleinere draaikolken, die op hun beurt weer kleinere draaikolken kunnen voortbrengen. Zo ontstaat een chaotische keten van steeds kleiner wordende draaikolken.

Niagara Whirlpool. Enkele kilometers stroomafwaarts van de Niagara Falls buigt de rivier scherp af en ontstaan draaikolken doordat snelstromend water van de Niagarawatervallen tegen de wanden van de kloof botst. Afbeelding: Sarah Jansen.

Wanneer de draaikolken klein genoeg worden, zorgt de wrijving in de vloeistof ervoor dat ze helemaal verdwijnen en hun energie wordt omgezet in warmte. In theorie is er echter nog een andere mogelijkheid: de draaikolkjes in de wiskundige oplossing worden steeds kleiner en kleiner, zodat hun energie in een steeds kleiner volume komt en de draaisnelheid uiteindelijk oneindig groot wordt. In werkelijkheid weten we dat dit niet kan: snelheden zullen altijd eindig groot blijven. Toch was decennialang niet duidelijk of de Navier-Stokesvergelijkingen altijd wel in overeenstemming met die werkelijkheid zouden zijn, of dat ze in bepaalde gevallen onzinnige oneindigheden zouden opleveren.

Opgelost?

Aan die onduidelijkheid lijkt nu een einde te zijn gekomen. OpenAI beweert namelijk een oplossing van de Navier-Stokesvergelijkingen gevonden te hebben waarin wel degelijk oneindige snelheden voorkomen. Over de oorsprong van het bewijs is, zoals in de media uitgebreid is uitgemeten, overigens de nodige controverse. Kort voordat OpenAI naar buiten kwam met hun oplossing, kondigden wiskundigen Tristan Buckmaster en Levent Alpöge aan drie gerelateerde problemen te hebben opgelost, die opstapjes waren naar een oplossing

voor het Navier-Stokesprobleem. Het is onduidelijk hoeveel van hun werk gebruikt is door OpenAI. Meer over deze controverse lees je bijvoorbeeld in dit artikel van New Scientist.

Het resultaat dat nu is bekendgemaakt is geverifieerd met de wiskundige programmeertaal Lean, wat vertrouwen geeft dat het inderdaad correct is – al zal het nog nauwkeurig worden gecontroleerd door wiskundigen voordat het millenniumprijsprobleem definitief als opgelost wordt beschouwd.

Als het bewijs van OpenAI die beoordeling doorstaat, betekent dat gelukkig niet dat we de Navier-Stokesvergelijkingen maar in de prullenbak moeten gooien. Het tevoorschijn komen van onfysische oneindigheden zou weliswaar betekenen dat de vergelijkingen de werkelijkheid niet altijd perfect beschrijven, maar in verreweg de meeste gevallen blijft de beschrijving buitengewoon succesvol. Ook (toekomstige) stromingsdeskundigen hoeven nog niet direct voor hun werk te vrezen: turbulentie wordt nog altijd heel slecht begrepen, dus er is meer dan genoeg te doen!

Wil je meer weten over de Navier-Stokesvergelijkingen en over het millenniumprijsprobleem, en zien hoe de vergelijkingen er nu precies uitzien? Quanta Magazine maakte een interessante (Engelstalige) video over het onderwerp: