Hoe hang je een schilderij op?

Het ophangen van een schilderij vereist wat handigheid, maar geen hogere wiskunde. Of toch wel? In dit artikel leg ik aan de hand van een raadsel uit wat het ophangen van een schilderij te maken heeft met de fundamentaalgroep – een wiskundige manier om te rekenen met elastiekjes. Ook in de moderne natuurkunde, bijvoorbeeld in de snaartheorie, worden deze ideeën veelvuldig gebruikt.

Afbeelding 1. Rekenen met elastiekjes. Afbeelding via Wallpaper Flare.

Een schilderijraadsel

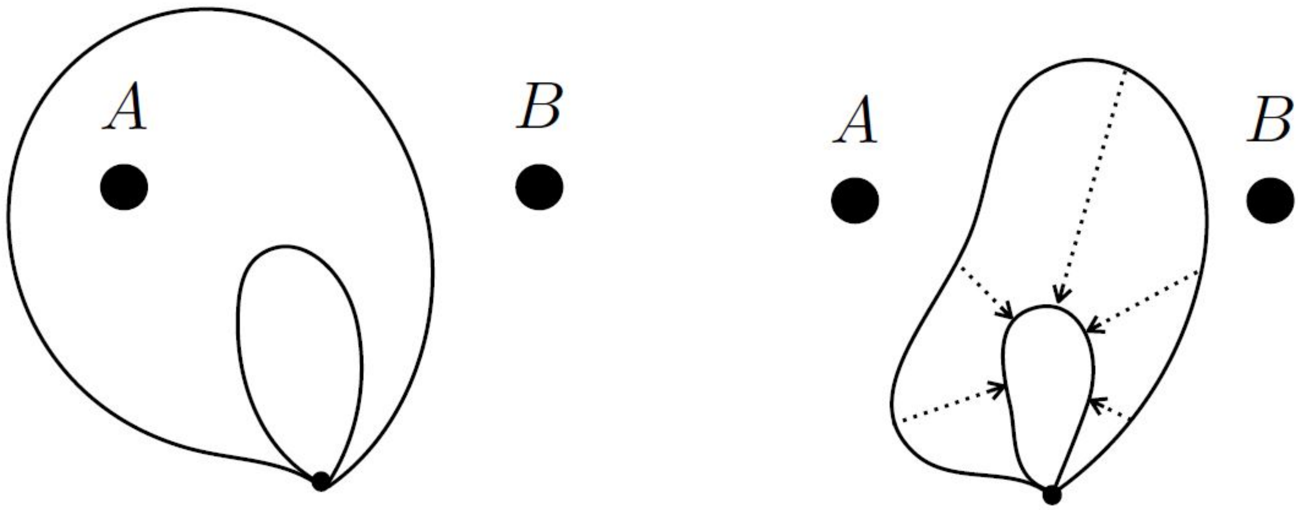
Stel je voor dat je een schilderij wilt ophangen met behulp van een touwtje en twee spijkers. Er zijn natuurlijk verschillende manieren om dit te doen. Zo zou je het touwtje aan de bovenhoeken van het schilderij kunnen vastmaken en het bijvoorbeeld om de eerste spijker kunnen hangen, of om de tweede, maar ook om beide spijkers. Dit zijn natuurlijk prima oplossingen als je het schilderij simpelweg aan de muur wilt hebben, maar een bekend raadsel vraagt het volgende: is er een manier om het schilderij op zo’n manier aan de muur te hangen dat het naar beneden valt zodra je een van beide spijkers lostrekt? Het schilderij hangt dan aan de muur, maar aan geen van beide spijkers afzonderlijk.

Hoe zou je dit aanpakken? In gedachten wat dingen uitproberen – of fysiek als je toevallig het juiste materiaal thuis hebt liggen – lijkt een goede eerste stap. Je zult er dan waarschijnlijk snel achter komen dat het niet zo makkelijk om een configuratie te bedenken die werkt. Neem bijvoorbeeld het touwtje dat simpelweg om beide spijkers hangt. Zodra je een van beide spijkers lostrekt, blijft het schilderij aan de andere spijker hangen. Dit is dus geen oplossing! Ook de configuratie waarbij ik het touwtje om de eerste spijker hang, maar niet om de andere, is geen oplossing. Als ik in dit geval de eerste spijker wegtrek valt het schilderij wel, maar als ik de tweede spijker weghaal, blijft het gewoon hangen.

Afbeelding 2. Twee manieren om een schilderij op te hangen. Afbeelding Einstein: Bikash Das.

In het vervolg kies ik voor een systematische aanpak. Het idee is om het concrete schilderijraadsel te vertalen naar een abstracter probleem, zodat we hopelijk een algemene manier vinden om het op te lossen. We stellen ons de muur daarom voor als een tweedimensionaal vlak met twee punten die de posities van de spijkers weergeven. Laten we deze punten voor het gemak A en B noemen. Het schilderij hangt aan een touwtje dat we samenbinden tot een lus zodat het schilderij op een punt aan de lus hangt. Om ervoor te zorgen dat het schilderij niet naar beneden valt moet de lus op een bepaalde manier om de punten A en B zijn gewikkeld.

We kunnen de lus als het ware vrij over het vlak bewegen tot we een van beide ‘spijkers’ tegenkomen: de punten A en B kun je dus zien als ‘gaten in het vlak’ waar de lus niet overheen kan worden getrokken. Wanneer het lusje om geen van beide gaten loopt noemen we het *samentrekbaar*: we kunnen het in theorie dan helemaal samentrekken zonder een obstakel tegen te komen. Die eigenschap betekent dat het schilderij naar beneden zal vallen zodra we het loslaten. Wanneer het lusje daarentegen niet samentrekbaar is – en daarmee wél om ten minste een van beide spijkers zit gewikkeld – blijft het hangen. Kortom: met de samentrekbaarheid van de lus beschrijven we of het schilderij aan de spijkers blijft hangen of niet. We maken het plaatje iets overzichtelijker door het schilderij zelf weg te laten en alleen te focussen op het lusje. Zie bijvoorbeeld afbeelding 3:



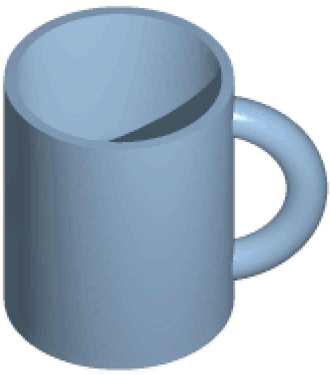
Afbeelding 3. Samentrekbaarheid van lusjes. De twee spijkers komen overeen met de twee punten (A en B) in het vlak. Het touwtje is samengebonden tot een lusje dat op een bepaalde manier om de punten is gewikkeld. Het schilderij is voor het gemak weggelaten. Links: twee lusjes, het kleine een voorbeeld van een samentrekbaar lusje dat om geen van beide punten zit (het schilderij valt in dat geval naar beneden) en het grotere een lusje dat niet-samentrekbaar is omdat het rondom het punt A is gewikkeld (het schilderij blijft in dat

geval hangen.) Rechts: je kunt twee samentrekbare lusjes in elkaar vervormen zonder een spijker tegen te komen.

Het raadsel dat we willen oplossen kan nu als volgt worden geïnterpreteerd: we proberen een lusje in het vlak te vinden dat niet samentrekbaar is wanneer beide punten aanwezig zijn, maar samentrekbaar wordt zodra ik een van beide punten weghaal. Verrassend genoeg blijkt dit probleem – het vinden van lussen in een bepaalde ruimte en het beschrijven van hun samentrekbaarheid – door wiskundigen uitvoerig bestudeerd; het wiskundige vakgebied dat hierover gaat heet *topologie*.

De fundamentaalgroep

Kort gezegd is topologie de wiskunde van vormen. Denk hierbij aan het verschil tussen een tennisbal en een donut. De globale vorm van beide objecten – ook wel de `topologie’ van het object genoemd – is verschillend. We zeggen dat twee vormen hetzelfde zijn wanneer we ze in elkaar kunnen omvormen zonder te knippen of te plakken; we stellen ons dus voor dat het object kneedbaar is. Voor de tennisbal en donut is het intuïtief duidelijk dat de vormen *niet* hetzelfde zijn: de tennisbal is rond, terwijl de donut een soort gat in het midden heeft. Een koffiemok daarentegen heeft wél dezelfde vorm als een donut!

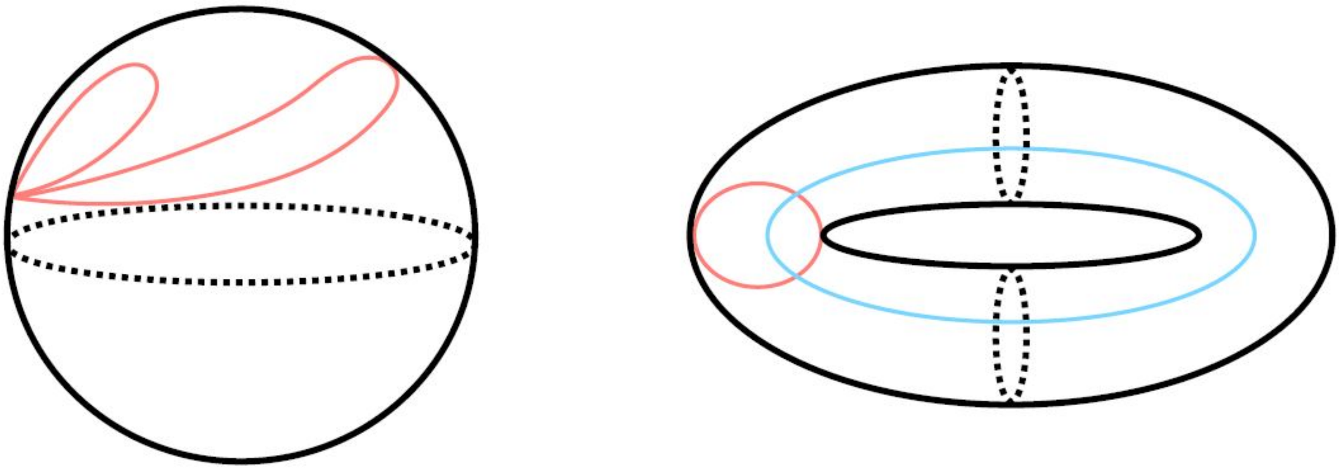


Animatie. Een donut wordt, zonder knippen en plakken, een koffiemok. Via Wikimedia Commons.

Wiskundigen proberen dit intuïtieve idee precies te maken, en het liefst in termen van getallen uit te drukken. Zo’n systematische aanpak is erg belangrijk. Veel hoger-dimensionale wiskundige ruimtes zijn namelijk lastiger (of in sommige gevallen helemaal niet!) te visualiseren. Ook in de natuurkunde kom je dit soort ruimtes veelvuldig tegen; bijvoorbeeld binnen de snaartheorie, een theorie die alle natuurkrachten probeert te verenigen. Daar is het de topologie van de ruimtetijd zelf – in deze theorie een *tien*-dimensionale ruimte! – die een belangrijke rol speelt. De vraag is daar wat de vorm is van de zes dimensies die we niet kunnen zien omdat ze op een ingewikkelde manier heel klein zijn `opgerold’.

De topologie van een wiskundige ruimte kun je bestuderen door te kijken naar het gedrag van kleine lusjes in die ruimte. De verzameling van alle lusjes die we in een ruimte kunnen tekenen vormt de *fundamentaalgroep*. Het is belangrijk om op te merken dat we de lusjes mogen uitrekken en vervormen zonder ze kapot te knippen; we beschouwen ze dus in feite als kleine elastiekjes. Lusjes die op deze manier aan elkaar zijn gerelateerd beschouwen we als hetzelfde element in de fundamentaalgroep. Omdat we samentrekbare lusjes altijd in elkaar kunnen omvormen zijn ze wiskundig gezien ‘hetzelfde’. Pas zodra er een gat in de ruimte zit kun je bepaalde lusjes niet aan elkaar relateren: je kunt een lusje namelijk niet over een gat heentrekken zonder het kapot te maken. De fundamentaalgroep bevat daarmee belangrijke informatie over de niet-samentrekbare lusjes en daarmee over de ‘gaten’ die zich in de ruimte bevinden.

De bovenstaande beschrijving van de fundamentaalgroep is voor de niet-wiskundige waarschijnlijk erg abstract. Het is daarom belangrijk om wat voorbeelden te zien. Laten we teruggaan naar de tennisbal en de donut. De fundamentaalgroep van het oppervlak van de tennisbal is *triviaal,* waarmee we bedoelen dat die uit slechts één element bestaat. Alle lusjes die ik op het boloppervlak kan tekenen zijn namelijk samentrekbaar: we zien ze dus als hetzelfde element in de fundamentaalgroep. In die zin zitten er geen `gaten’ in het boloppervlak.

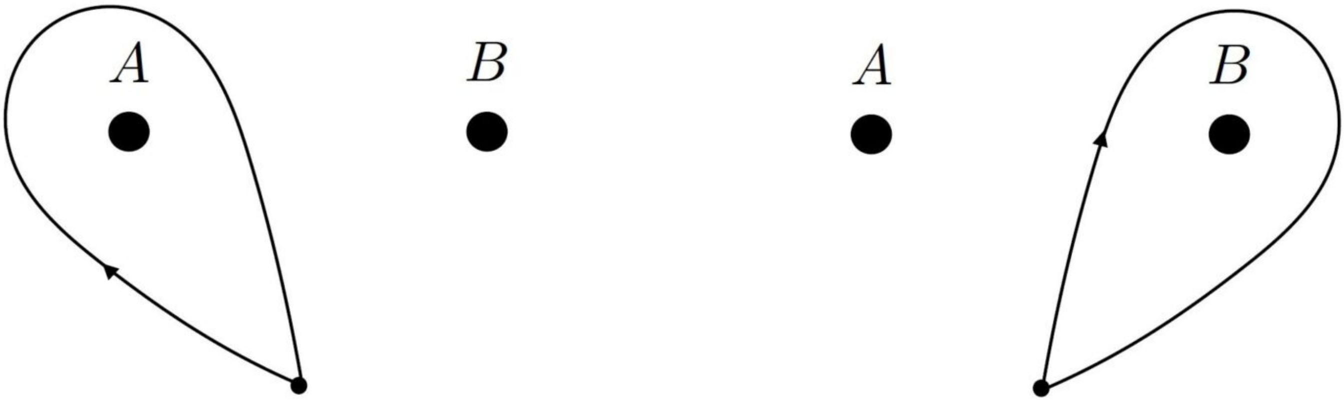


Afbeelding 4. De fundamentaalgroep van het boloppervlak en de donut. Links: alle lusjes in het boloppervlak kan ik in elkaar omvormen door ze over de bol heen te trekken. Rechts: de donut heeft twee niet-triviale lusjes (aangegeven met rood en blauw) die je op geen enkele manier kunt samentrekken.

De fundamentaalgroep van het donutoppervlak is ingewikkelder – terzijde: iets wat verrassend genoeg veel te maken heeft met de natuurkunde van zwarte gaten zoals ik eerder hier heb uitgelegd. Als je het donutoppervlak bestudeert ontdek je namelijk al snel twee niet-samentrekbare lusjes, die in afbeelding 4 (rechts) zijn aangegeven. Deze lusjes zijn niet samentrekbaar zonder dat het lusje het donutoppervlak verlaat, en daarmee zijn het niet-triviale elementen van de fundamentaalgroep. Ook kun je laten zien dat de lusjes niet in elkaar kunnen worden omgevormd. Wiskundigen zeggen dat de fundamentaalgroep van de donut wordt *voortgebracht* door deze lusjes. Dit betekent in feite dat we alle andere lusjes kunnen maken door deze twee op een slimme manier te combineren[1]. Het feit dat de fundamentaalgroep van de tennisbal en donut verschillend zijn, is nu een wiskundige manier om te laten zien dat deze objecten verschillende vormen hebben.

Rekenen met lusjes

Laten we teruggaan naar het vraagstuk over het ophangen van een schilderij. De wiskundige ruimte waarmee we in dat geval te maken hebben is het vlak met twee gaten. Wat is de fundamentaalgroep van deze ruimte? Om hier een concrete beschrijving van te geven, is het nuttig om wat notatie in te voeren. Er zijn twee lusjes die een belangrijke rol spelen: het lusje dat één keer rond punt A gaat, en het lusje dat één keer rond B gaat. We verwijzen naar deze lusjes met de letters a en b. Het maakt voor de fundamentaalgroep uit in welke richting het lusje wordt doorlopen: we nemen hier aan dat a en b beide met de klok mee rondom de spijkers gaan. Zie afbeelding 5:

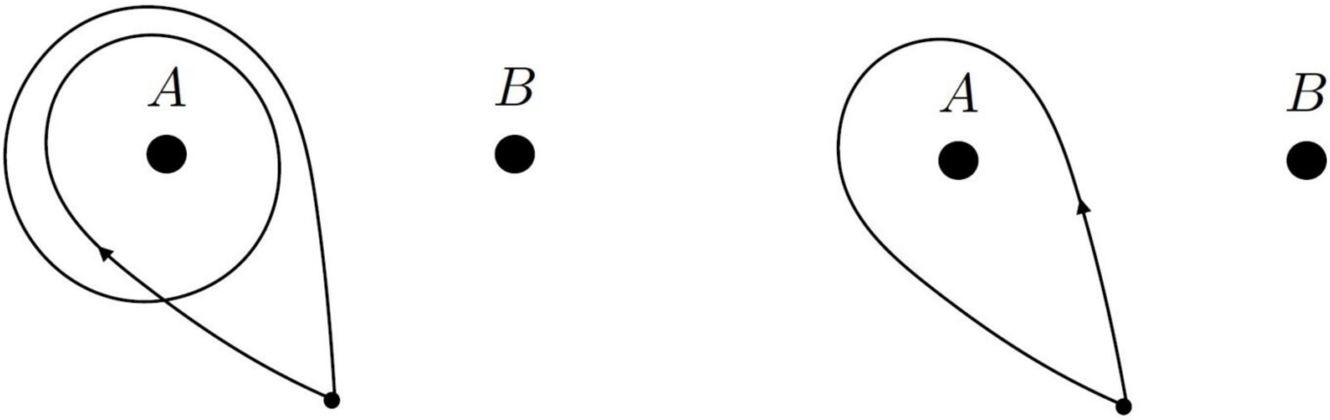


Afbeelding 5. Twee speciale lusjes. De fundamentaalgroep van het vlak met twee gaten wordt voortgebracht door het lusje dat één keer met de klok mee om A gaat (links), en het lusje dat één keer met de klok mee om B gaat (rechts). De richting waarin het lusje wordt doorlopen is met een pijltje aangegeven.

We kunnen twee lusjes samenstellen tot een nieuw lusje door eerst het ene te doorlopen en daarna het andere: dit definieert een abstracte ‘vermenigvuldiging’ op de ruimte van lusjes. Zo kunnen we bijvoorbeeld het lusje dat twee keer met de klok mee rondom het punt A gaat beschrijven met de combinatie

$$a \cdot a = a^2.$$

Het nemen van hogere machten van a correspondeert met nog vaker om het punt A heenlopen. De samentrekbare lus – die noch om het punt A, noch om het punt B gaat – komt nu overeen met het getal 1, of zo je wilt: a^0 (wat natuurlijk hetzelfde is als b^0, dat is ook 1). Inderdaad: als ik een lus samenstel met een samentrekbare lus kan ik hem altijd weer omvormen naar de oorspronkelijke lus.



Afbeelding 6. Twee elementen uit de fundamentaalgroep. Links: het lusje dat twee keer rondom A gaat is de samenstelling van a met zichzelf, dus a^2. Rechts: de inverse van a, oftewel a^{-1}, is het lusje dat in tegengestelde richting loopt.

We kunnen op deze manier ook een lusje beschrijven dat in tegengestelde richting rondom het punt A loopt. In formulevorm beschrijven we de lusjes die tegen de klok ingaan met negatieve machten:

$$a^{-1}.$$

We hebben nu de volgende regel: als ik eerst rechtsom rond het punt A loop en vervolgens linksom terug, is het resultaat samentrekbaar. In formulevorm hebben we:

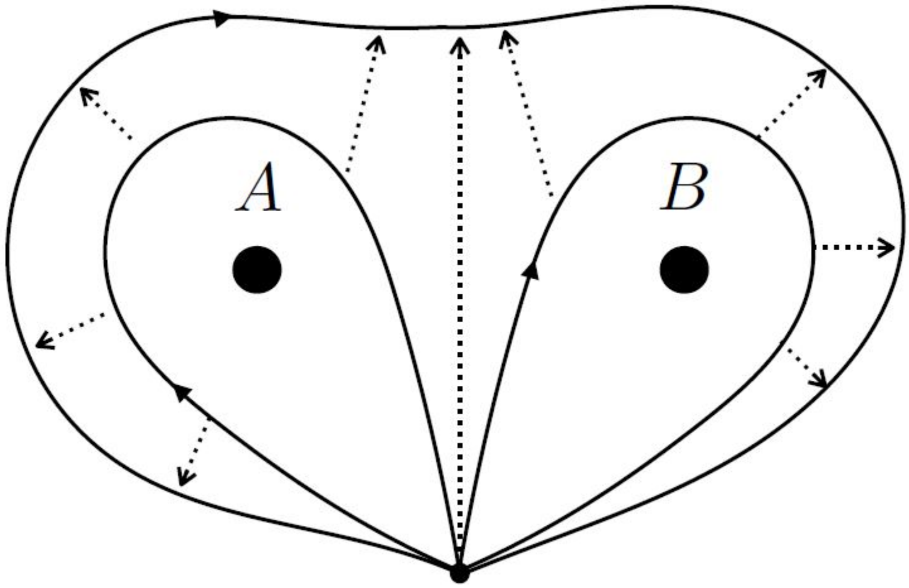
$$a^{-1} \cdot a = 1.$$

Wiskundig gezien betekent dit dat de tegengestelde lus de *inverse* is van de oorspronkelijke lus. De bovenstaande regels voor het samenstellen van twee lusjes geven de ruimte van lusjes de wiskundige structuur van een *groep*. Vandaar de naam fundamentaal*groep*! Voor het begrijpen van dit artikel hoef je niet precies te weten wat een groep[2] is: het is voldoende om je te realiseren dat je met behulp van de fundamentaalgroep een probleem over de *vorm* van een object kunt vertalen naar een puur *algebraïsch* probleem in termen van ‘rekenen met letters’.

De fundamentaalgroep van het vlak met twee gaten wordt voortgebracht door de lusjes a en b die om de twee gaten gaan. Formeel gezien bestaat de ruimte van lusjes uit alle *woorden*[3] in de letters a en b, en hun inverses. Een voorbeeld van zo’n woord is

$$b \cdot a.$$

Deze uitdrukking komt overeen met het lusje dat eerst rondom punt A gaat en vervolgens rondom B. (We lezen, zoals vaak in de wiskunde, de woorden van rechts naar links.) Je kunt dit lusje omvormen tot de lus die we al eerder bespraken: de lus die simpelweg rondom beide spijkers loopt zonder er verder iets mee te doen. Dit is weergeven in afbeelding 7:



Afbeelding 7. De samenstelling van de lusjes a en b. Als we eerst lusje a doorlopen en daarna lusje b is het resultaat een lusje dat zowel om A als om B gaat.

Een ingewikkelder voorbeeld is de lus

$$a^{-2} \cdot b^{-2} \cdot a.$$

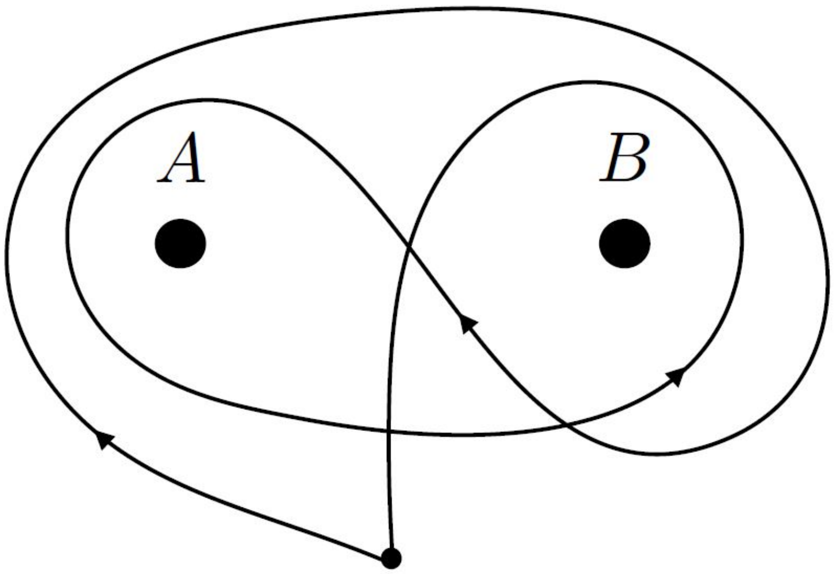
Deze gaat eerst rondom A en vervolgens in tegengestelde richting rondom B en dan twee keer linksom rond A. Je kunt ieder lusje in de fundamentaalgroep beschrijven met een soortgelijke reeks van letters.

De oplossing

Nu we weten hoe de fundamentaalgroep van het vlak met twee gaten eruitziet, kunnen we teruggaan naar het raadsel: het vinden van een niet-samentrekbare lus die samentrekbaar wordt zodra we een van beide spijkers uit de muur trekken. We hebben het vinden van lusjes vertaald naar het construeren van woorden in twee letters; nu zoeken we een uitdrukking in de letters a en b zodat de gehele uitdrukking gelijk wordt aan 1 als we een van beide letters vervangen door een 1 – dat is namelijk precies wat het betekent om één van de gaten (de spijkers) ‘weg te halen’. De eenvoudigste uitdrukking die aan deze voorwaarde voldoet is het volgende woord:

$$[a,b] = b^{-1} \cdot a^{-1} \cdot b \cdot a$$

De uitdrukking met de rechte haakjes aan de linkerkant is simpelweg notatie voor de specifieke combinatie a’s en b’s aan de rechterkant[4] – een notatie die we verderop nog nuttig kunnen gebruiken. We kunnen nu teruggaan naar het fysieke plaatje en de betreffende lus tekenen: we leggen het touwtje eerst rondom A, dan rondom B, en vervolgens in omgekeerde richting rondom A en rondom B. Het resultaat is in afbeelding 8 weergeven:



Afbeelding 8. De oplossing van het raadsel. Het lusje gaat eerst rondom A, dan rondom B, daarna in tegengestelde richting rondom A, en ten slotte in tegengestelde richting rondom B.

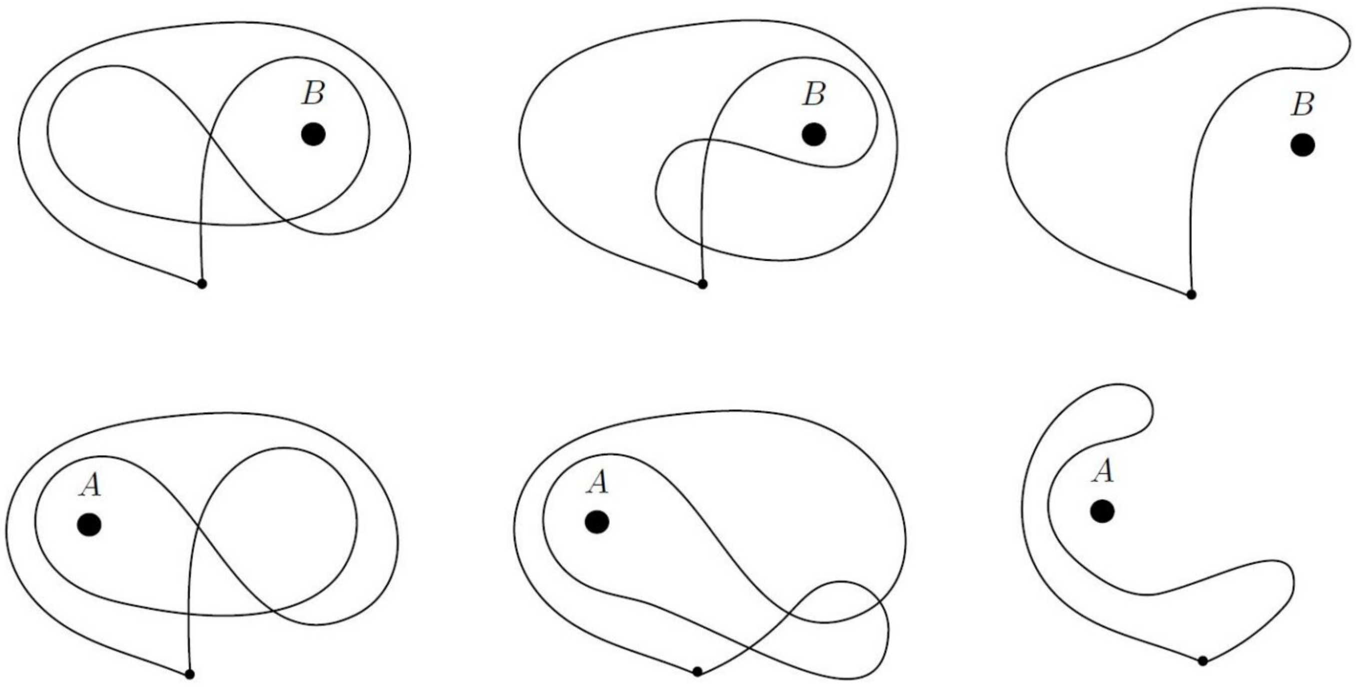
Laten we nagaan dat dit woord de juiste eigenschappen heeft. Als we de spijker A uit te muur trekken maken we lus a samentrekbaar – wat overeenkomt met het neerzetten van een 1 op de plek van a – en natuurlijk ook op de plek van a^{-1}. De gehele lus wordt dan inderdaad samentrekbaar:

$$b^{-1} \cdot 1 \cdot b \cdot 1 = b^{-1} \cdot b = 1.$$

Het schilderij valt daarom van de muur zodra we spijker A verwijderen. Iets soortgelijks gebeurt wanneer we spijker B weghalen. Dan geldt namelijk:

$$1 \cdot a^{-1} \cdot 1 \cdot a = a^{-1} \cdot a = 1.$$

Het schilderij valt opnieuw naar beneden! In de abstracte lettertaal is het duidelijk dat we het probleem hebben opgelost. De bovenstaande formules hebben natuurlijk een fysieke tegenhanger: in afbeelding 9 en 10 is stapsgewijs te zien hoe het touwtjes daadwerkelijk loskomt zodra ik een van beide spijkers verwijder. Ben je daardoor nog niet overtuigd, probeer het dan natuurlijk vooral zelf met een touwtje uit!

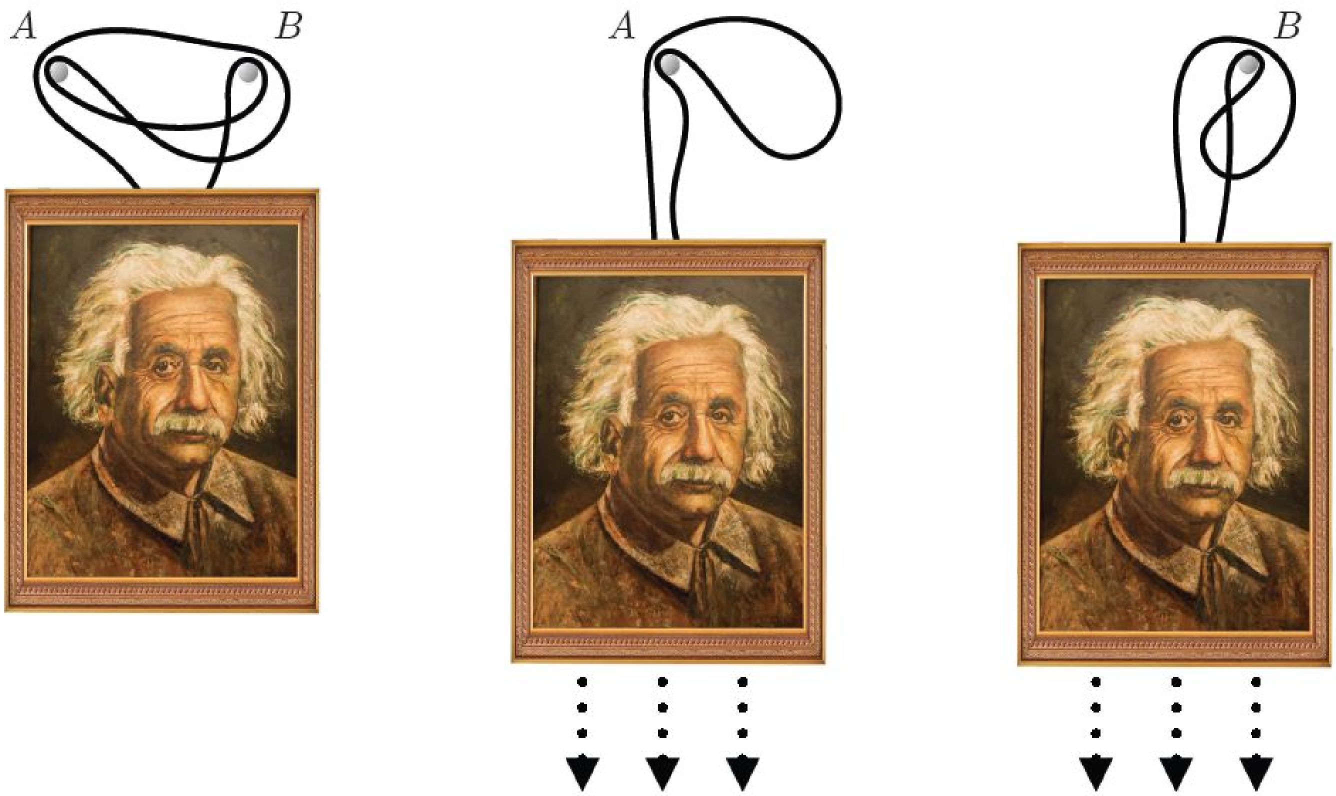


Afbeelding 9. Samentrekbaarheid. De lus in onze oplossing heeft inderdaad de juiste eigenschappen: het lusje wordt samentrekbaar zodra ik een van beide spijkers weghaal. (Bovenin de afbeelding wordt A weggehaald; onderin B.)

Je denkt op dit moment waarschijnlijk: was het echt nodig om al deze wiskunde te introduceren? Een voordeel van de algebraïsche aanpak is dat het nu gemakkelijk is om de oplossing te veralgemeniseren naar de situatie met meer dan twee spijkers. Bijvoorbeeld: in het geval van drie spijkers wordt de fundamentaalgroep voortgebracht door drie letters, zeg a, b en c. De betreffende lus die het raadsel oplost – dus zo dat het schilderij altijd valt, of je nu spijker A, B of C weghaalt – wordt nu gegeven door het woord

$$[[a,b],c] = c^{-1} \cdot (b^{-1} \cdot a^{-1} \cdot b \cdot a)^{-1} \cdot c \cdot (b^{-1} \cdot a^{-1} \cdot b \cdot a).$$

Het is een leuke opgave om na te gaan dat dit woord inderdaad het raadsel voor drie spijkers oplost: het wordt gelijk aan 1 zodra ik een van de drie letters vervang door een 1. Het resultaat had je met simpel uitproberen waarschijnlijk nooit gevonden! Dit is de kracht van de fundamentaalgroep.



Afbeelding 10: Hoe hang je een schilderij op? De oplossing van het raadsel (links). Zodra ik spijker B (midden) of spijker A (rechts) weghaal, valt het schilderij van de muur. Afbeelding Einstein: Bikash Das.

Samengevat: we hebben gezien dat er achter een ogenschijnlijk simpele vraag over het ophangen van een schilderij veel interessante wiskunde schuilgaat. Het onderliggende idee is om het *meetkundige* probleem te vertalen naar een *algebraïsch* probleem in termen van rekenen met letters: de fundamentaalgroep stelt je in staat om zo te rekenen met lusjes! Met behulp van de rekenregels is het relatief makkelijk om te bedenken hoe je je schilderij het beste kunt ophangen. Een mooie bijkomstigheid is dat je via deze lusjesrekening gelijk iets leert over de globale vorm – wat wiskundigen \`topologie' noemen – van de ruimte waarin de lusjes zich bevinden. Dit laatste is van belang in allerlei takken van de natuurkunde, van de fysica van elementaire deeltjes tot de studie van kristallen en materialen. Wie allerlei wis- en natuurkundige soorten van 'ruimte' wil begrijpen, kan het best beginnen met het ophangen van wat schilderijtjes!

---

[1] Het blijkt dat de vorm van de donut zo is dat de *volgorde* waarin ik de donutlusjes combineer niet uitmaakt. Voor het schilderijraadsel is deze volgorde wel degelijk van belang!

[2] Voor wie dit wel wil weten: in dit artikel over matraswiskunde heb ik in iets meer detail uitgelegd wat een groep is.

[3] Met een woord bedoel ik hier niets meer dan een reeks letters.

[4] De wiskundige term voor deze specifieke combinatie is de *commutator* van a en b.