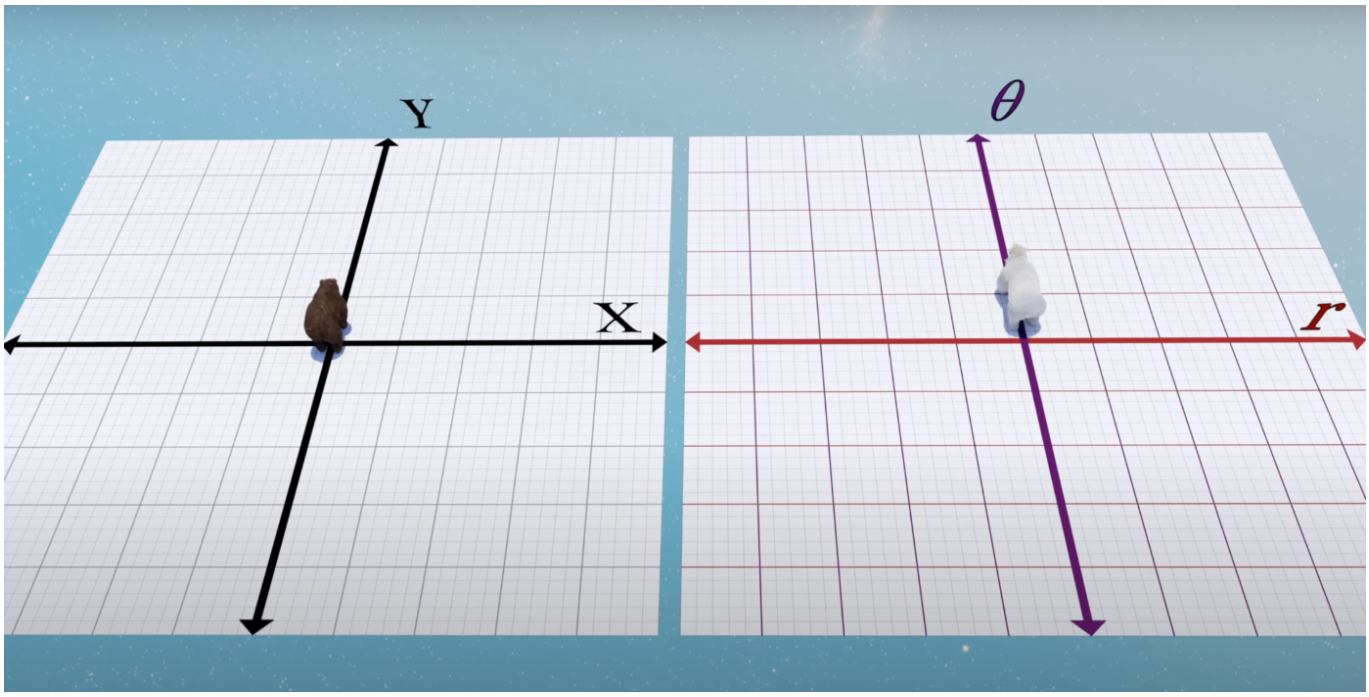
IJsberen in de matrix

Als je weleens met het vliegtuig op vakantie naar een verre bestemming bent geweest, heb je misschien wel opgemerkt dat de kortste route naar je vakantiebestemming geen rechte lijn volgt op een landkaart. Het vliegtuig volgt een *geodetisch* pad, het kortste pad dat twee punten op een *gekromd* oppervlak met elkaar verbindt. In een mooi filmpje van YouTubekanaal Dialect wordt uitgelegd wat dat precies inhoudt.



Beren in de matrix. Zijn beide oppervlakken zo vlak als ze lijken? Afbeelding uit het YouTubefilmpje van Dialect.

In de formulering van de klassieke mechanica volgens Joseph-Louis Lagrange (die eerder aan bod kwam in een artikel over de breking van lichtstralen) wordt de baan van een deeltje waarop geen kracht werk beschreven door zo'n geodeet: het deeltje neemt de kortste weg door de ruimte. Ook vormt beweging langs geodeten een essentieel onderdeel in de algemene relativiteitstheorie van Einstein, en kan met behulp van geodeten de baan van bijvoorbeeld planeten om een ster verklaard worden.

Aan de hand van een voorbeeld kunnen we meer leren over afstanden in gekromde ruimten. We introduceren twee beren, die afgebeeld zijn in de bovenstaande figuur. Cartesische Beer is een bruine beer en leeft in cartesisch land, waar lijnen recht zijn en elkaar in rechte hoeken snijden. (Het coördinatenstelsel dat deze ruimte beschrijft wordt naar René Descartes 'cartesisch' genoemd – vandaar de naam van het land en de beer.) Het assenstelsel van Cartesische Beer komt overeen met echte afstanden en echte hoeken die hij kan bepalen met een alledaagse liniaal. IJsbeer leeft daarentegen in pool-land. Ook hier zijn lijnen recht en snijden ze elkaar in rechte hoeken. De coördinaten behorende bij zijn assenstelsel vormen poolcoördinaten. Het assenstelsel van IJsbeer komt *niet* overeen met de echte wereld: hij leeft in de matrix, een projectieve denkwereld. Je kan deze denkwereld vergelijken met de wereld op een kaart zoals in het vliegtuig. Dit is een platte voorstelling van de aarde, die in het echt natuurlijk rond is.

Omdat IJsbeer in de matrix leeft, zijn rechte lijnen voor hem niet per se rechte lijnen in de echte wereld. Als IJsbeer bijvoorbeeld langs de as loopt die in de figuur met θ is aangegeven, correspondeert dat met een cirkelvormige beweging in de echte wereld: θ is in de echte wereld de breedtegraad op de aardbol. Voor IJsbeer is er echter niets vreemds aan de hand, zolang hij in pool-land blijft zijn lijnen recht, en snijden lijnen ze elkaar in rechte hoeken. Stel je nu echter voor dat Cartesische Beer aan IJsbeer de beruchte rode pil geeft, en IJsbeer ontwaakt in de echte wereld. De realiteit van IJsbeer was enkel een projectie omdat in pool-land poolcoördinaten, en niet cartesische coördinaten worden gebruikt. Hoe kan IJsbeer zich aanpassen aan de echte wereld?

Om de relatie tussen pool-land en cartesisch land te begrijpen, moeten we de relatie tussen poolcoördinaten en cartesische coördinaten begrijpen. Met andere woorden: we moeten begrijpen hoe we met een normale liniaal, die in cartesische coördinaten meet, hoeken en afstanden in poolcoördinaten kunnen bepalen en vice versa. Hoe dat in zijn werk gaat wordt aan de hand van bovenstaand voorbeeld uitgelegd in het filmpje op het YouTubekanaal van Dialect.