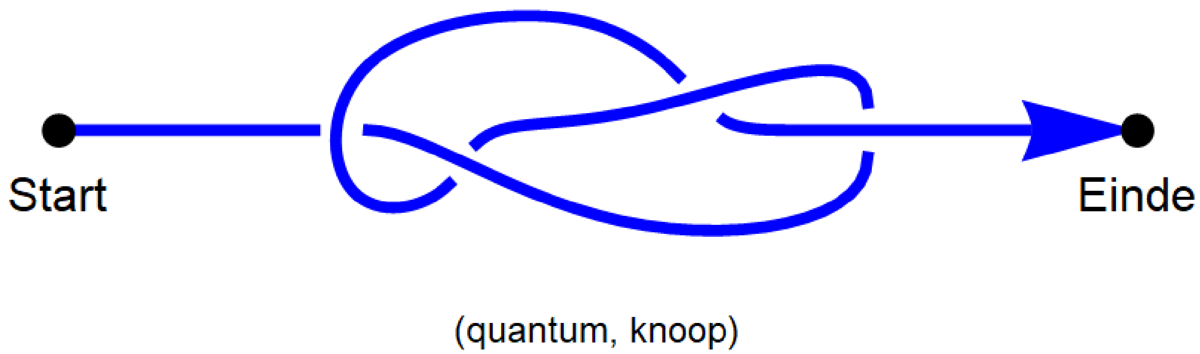
Knopen en natuurkunde: het Jonespolynoom

Een aantal weken geleden schreef ik een artikel over het verband tussen wiskundige knopentheorie en de quantummechanica. Daarin werd beschreven dat je voor iedere knoop een zogeheten Jonespolynoom kan uitrekenen, en dat de uitkomst overeenkomt met de kans dat een quantumdeeltje een bepaald pad aflegt – zie afbeelding 1. Ik beloofde toen ook, dat het fijne van het Jonespolynoom is dat je het voor elke knoop kan uitrekenen, hoe ingewikkeld die ook is. Het enige dat je nodig hebt, is een stappenplan en genoeg geduld. Dit is, voor niet te ingewikkelde knopen, zelfs erg leuk om te doen. Dus: daar gaan we!



Afbeelding 1: Een quantumknoop.Mogelijk pad van een quantumdeeltje met een knoop.

Even oefenen met knopen ontwarren: de Reidemeisterbewegingen

Stel je voor: je hebt een knoop en wil daarvan het Jonespolynoom berekenen. Hoe meer deze knoop "in de knoop zit", des te langer dit duurt. Per kruising van twee lijnen moet je één keer helemaal door het stappenplan heen. Daarom is het een goed idee om de knoop eerst zo makkelijk mogelijk te tekenen. Daarbij mag je alles doen, zolang je maar niet twee lijnen door elkaar heen beweegt. Dat kan met echt touw namelijk ook niet. Het maakt niet uit hoe je de knoop tekent, zolang je geen lijnen door elkaar beweegt zal er altijd hetzelfde Jonespolynoom uitkomen.

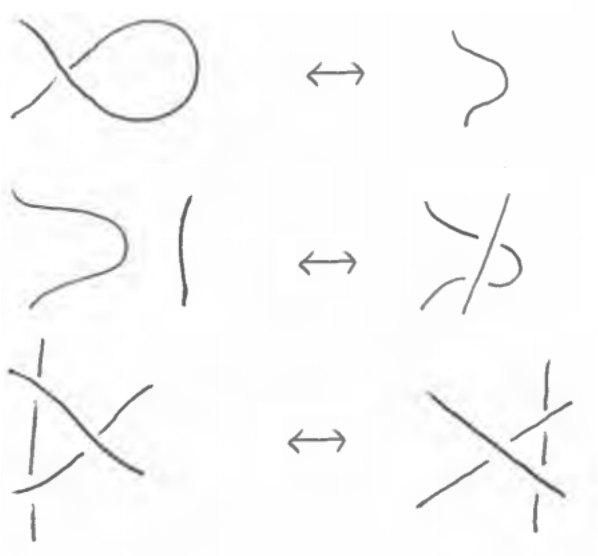
In het algemeen zijn er drie acties die je mag doen om je knoop te vereenvoudigen, de drie

Reidemeisterbewegingen (afbeelding 2):

1. Je mag een lusje 'rechttrekken'.

2. Je mag twee lijnen/touwtjes langs elkaar heen bewegen.

3. Je mag ook een derde touwtje over twee andere heen bewegen.



Afbeelding 2: De Reidemeisterbewegingen.Drie mogelijke bewerkingen die het Jonespolynoom niet veranderen.

De reden dat je dit mag doen, is dat het Jonespolynoom invariant is onder deze acties. Aan de hand van de twee basisregels die ik straks ga introduceren, kan je bewijzen dat het Jonespolynoom inderdaad niet verandert, maar dat bewijs zal ik in dit artikel niet geven.

Als het je niet lukt om de knoop nog makkelijker te maken, dan ben je op het goede punt aangekomen om te beginnen met het stappenplan voor het berekenen van het Jonespolynoom.

Een voorbeeld om te oefenen met de Reidemeisterbewegingen: overtuig jezelf aan de hand van deze bewegingen dat de knoop in afbeelding 3 gelijk is aan de triviale knoop, dus eigenlijk helemaal niet in de knoop zit!

Afbeelding 3: Een triviale knoop.Kan jij deze knoop vereenvoudigen met behulp van de Reidemeisterbewegingen?

Het Jonespolynoom

Ik zal het algemene stappenplan uitleggen aan de hand van een specifieke voorbeeldknoop die te zien is in afbeelding 4. Deze knoop heeft vier kruisingen, waar de lijnen over elkaar heen gaan. Wat nog meer opvalt, is dat deze knoop een richting/oriëntatie heeft. Deze heb je nodig voor het berekenen van het Jonespolynoom. Ook in de toepassing op het quantumdeeltje is het duidelijk dat de knoop een richting moet hebben. Het deeltje gaat immers van start naar einde.

Afbeelding 4: Voorbeeldknoop.Van deze knoop gaan we het Jonespolynoom berekenen.

Een *polynoom* is een som van machten van een variabele x, zoals bijvoorbeeld x^2+2x+3. Een mogelijk antwoord voor een Jonespolynoom $J_K(x)$ van een knoop K zou dus kunnen zijn dat

$J_K(x)=x^2+2x+3$.

Er zijn twee basisregels waar de berekening op gebaseerd is:

1. Het Jonespolynoom van elke triviale knoop (zoals in afbeelding 3) is gelijk aan 1. (Het getal 1 is natuurlijk ook een – heel eenvoudig – polynoom!)

2. De volgende vergelijking is geldig:

Dit ziet er nu nog erg ingewikkeld uit, maar het zal in het stappenplan snel duidelijk worden wat deze vergelijking betekent. Wat we in elk geval moeten opmerken, is het verschil tussen de twee manieren van kruisen:

Situatie A:

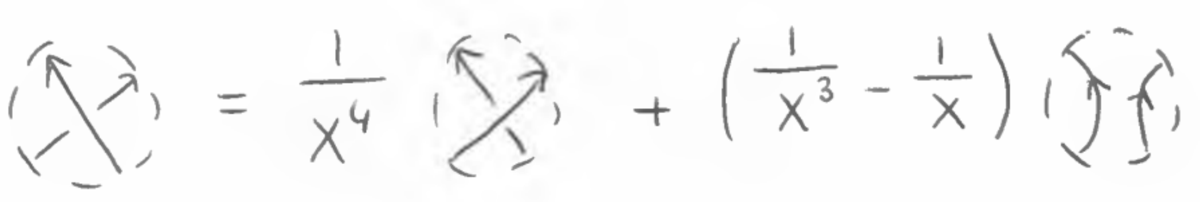
En situatie B:

Je ziet dat bij situatie A het rechter pijltje over links heen kruist. Bij situatie B gaat het precies andersom. Deze twee manieren van kruisen kan je niet in elkaar omvormen, zonder twee lijnen door elkaar te bewegen.

Met behulp van standaard rekenmethoden mogen we de bovenstaande vergelijking herschrijven om situatie A en B uit te drukken:

Situatie A:

Situatie B:



Ik zal elke stap van het stappenplan hieronder direct voordoen voor de knoop in afbeelding 4.

Stappenplan

Stap 0: Ontwar je knoop zo veel mogelijk door gebruik te maken van de Reidemeisterbewegingen. Je mag hierbij zoals gezegd alles doen, behalve lijnen door elkaar bewegen. Is je knoop gelijk aan de triviale knoop: dan ben je voor deze knoop nu al klaar en kan je deze vervangen door het getal 1.

Stap 0: We kunnen de knoop uit afbeelding 4 nog iets makkelijker tekenen door gebruik te maken van de eerste Reidemeisterbeweging. We krijgen dan:

Stap 1: Kies een kruising van lijnen, en teken er een gestippelde cirkel omheen. Het maakt niet uit welke kruising je kiest. ‘Knip’ vervolgens dit rondje uit de rest van de knoop.

Stap 1: We kiezen bijvoorbeeld deze kruising

en knippen het rondje eruit:

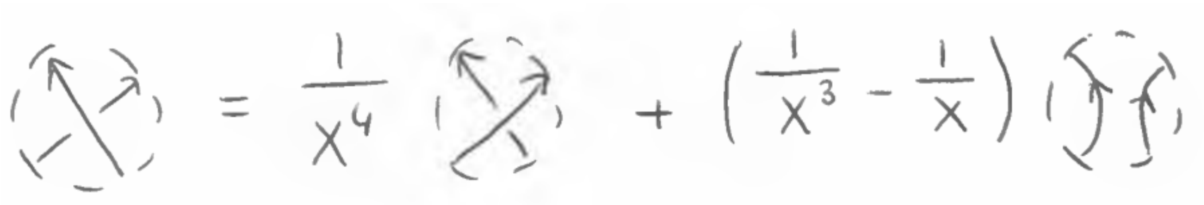
Stap 2: In de tweede basisregel, zien we twee verschillende manieren waarop twee lijnen elkaar kruisen, situatie A en situatie B. Check met welke situatie jouw rondje overeenkomt. Je mag het rondje draaien (maar niet spiegelen).

Stap 2: We zien als we het rondje draaien dat we te maken hebben met situatie A.

Stap 3: Nu gaan we de vergelijking van basisregel 2 invullen. Dit betekent:

Is jouw rondje in situatie A, vervang het als volgt:

Is jouw rondje in situatie B, vervang als volgt:



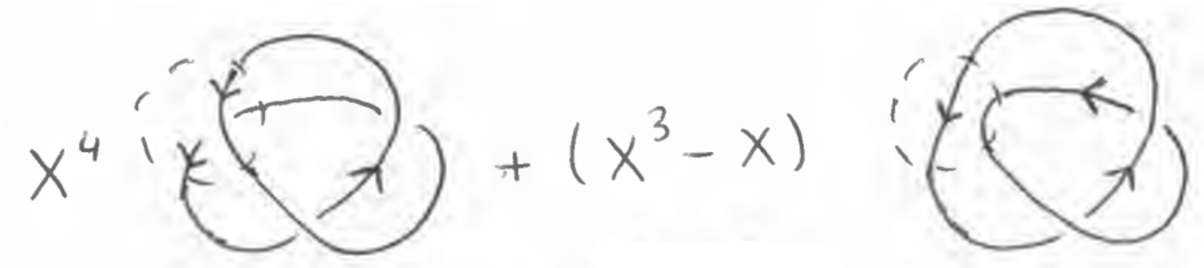
Stap 3: We hadden te maken met situatie A. Dus we schrijven op:

We hebben nu dus een cirkel vervangen door twee cirkels, allebei vermenigvuldigd met een polynoom.

Stap 4: Nu plakken we beide cirkels terug in de knoop. We zien dat we nu één knoop hebben vervangen door twee knopen. Het is misschien niet meteen te zien, maar deze twee knopen zijn makkelijker dan de knoop waar we mee begonnen.

Stap 4: Nadat we het cirkeltje hebben uitgeknipt, bleven we over met:

Nu kunnen we het cirkeltje vervangen door stap 3. We krijgen dus:

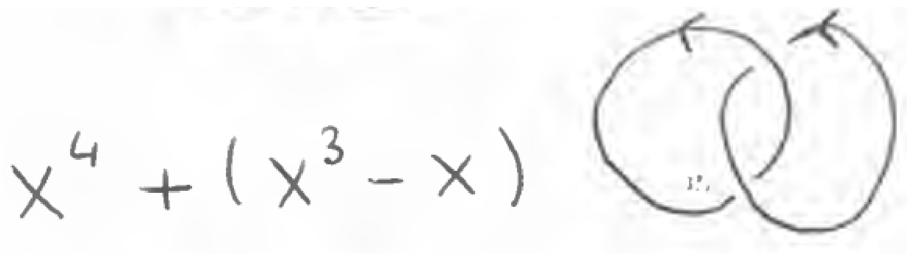


Let bij het inplakken op dat de pijltjes nog steeds goed doorlopen.

Stap 5: Zijn er nog knopen over? Begin voor beide knopen weer bij stap 0.

Stap 5: We gaan nu door met onze twee nieuwe knopen.

5.0: De eerste knoop kunnen we ontwarren tot we zien dat deze gelijk is aan de triviale knoop. Deze knoop geeft dus een factor één. We kunnen onze uitdrukking dus vereenvoudigen tot:



Nu rest ons nog het berekenen van het Jonespolynoom van de tweede knoop. We gaan voor die knoop dus naar stap 1.

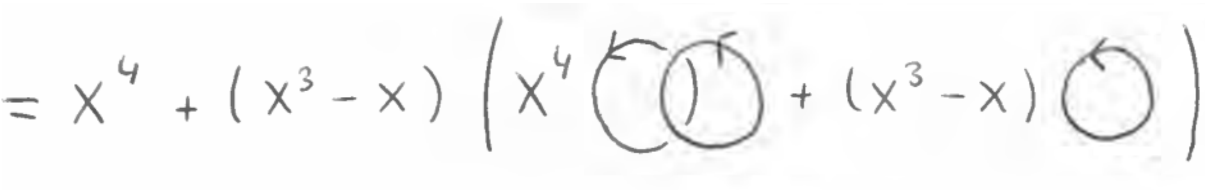
5.1 We kiezen weer een kruising en knippen het rondje uit.

5.2 We hebben opnieuw te maken met situatie A.

5.3 We vervangen:

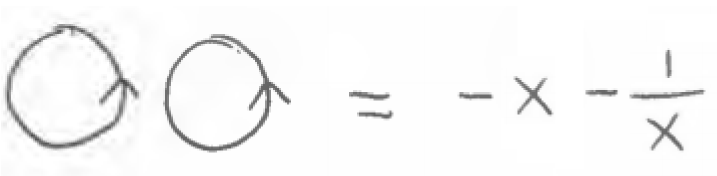
5.4 Dit plakken we weer terug in onze knoop uit stap 5.1

5.5.Als we ons resultaat invullen in de totale uitdrukking voor onze voorbeeldknoop staat er:



Nu beginnen we weer bij stap 0. Dit wordt de laatste keer, ik beloof het!

5.5.0 We zien dat de rechter van de knopen in bovenstaande uitdrukking weer gelijk is aan de triviale knoop, dus daar kunnen we 1 invullen. De linker knoop is twee keer de triviale knoop. We weten wel wat het Jonespolynoom van één triviale knoop is, maar daarmee weten we nog niet wat het polynoom van een paar van twee triviale knopen is! De allerlaatste stap is daarom het oplossen van het Jonespolynoom de linker knoop. Met regel 2 kan je aantonen dat:



Ik kan me voorstellen dat je dit niet meteen ziet; probeer dit zelf te bewijzen, of neem het voor nu even aan.

Dit betekent dat we alles in kunnen vullen en we krijgen als antwoord:

$J_K(x) = x^4 + (x^3-x)(x^4\ (-x-1/x)+x^3-x)$

Als we de haakjes uitwerken, volgt dat het Jonespolynoom van de klaverbladknoop in afbeelding 4 is gelijk aan:

$J_K(x) = -x^8+x^6-x^2$.

Conclusie

Ons geduld is inderdaad flink op de proef gesteld, maar we hebben nu wel een echt

Jonespolynoom berekend! Vond je dit leuk om te doen? Dan zou je ook het Jonespolynoom kunnen berekenen van dezelfde knoop als in het voorbeeld, maar dan met het pijltje omgedraaid. Wat kan je nu concluderen over de invloed van de gekozen richting?

Afbeelding 5: Achtknoop. Een uitdaging: bereken het Jonespolynoom van deze knoop!

Heb je er nog steeds geen genoeg van? Dan kan je het zelf ook eens proberen voor een knoop met één kruising meer, de achtknoop in afbeelding 5. Als je daarbij op een tussenstap uitkomt met een knoop die we hierboven al hebben uitgerekend, dan mag je natuurlijk meteen dat antwoord gebruiken.

Iedere knoop met één kruising meer, kan door middel van één rondje door het stappenplan opgedeeld worden in twee ‘eenvoudigere’ knopen, met minder kruisingen, die dan al bekend zijn. Op deze manier zijn stapje voor stapje de Jonespolynomen van ontzettend veel ingewikkelde knopen berekend.

Een laatste opmerking: In het originele Jonespolynoom wordt niet de variabele x gebruikt, maar wordt die variabele vervangen door $\sqrt{t}$. We vinden dus de originele antwoorden door in al onze vergelijkingen x te vervangen door $\sqrt{t}$. Het eindantwoord van ons voorbeeld zou dan dus zijn:

$J_K(t) = -t^4+t^3-t$.

We hebben nu geleerd hoe we het Jonespolynoom kunnen uitrekenen, maar wat hebben we daar ook al weer aan in de natuurkunde? Edward Witten heeft in ‘89 ontdekt dat de kans van een quantumdeeltje om een bepaald pad af te leggen, zoals in afbeelding 1, gegeven is door het Jonespolynoom van dat pad – zie het erste deel van deze serie. Op deze manier kan je met dit stappenplan dus je eigen quantumberekeningen doen!

Afbeelding blokkenschema voorpagina: moritz320 (Pixabay, CC0).