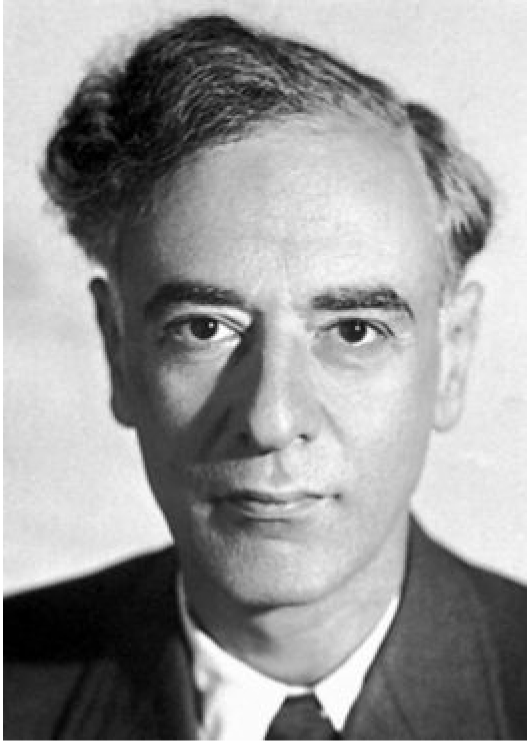
Lev Landau en de dichtheidsmatrix

22 januari is de geboortedag van de natuurkundige Lev Landau (1908-1968). Landau leverde talloze bijdragen aan de theoretische natuurkunde, zoals het ontwikkelen van de theorie van supervloeibaarheid, waar hij in 1962 de Nobelprijs voor kreeg. Vandaag bespreken we een heel andere vinding van Landau, die hij overigens tegelijk deed met John von Neumann: de quantummechanische dichtheidsmatrix. Die constructie speelt tegenwoordig een verrassende rol bij het begrijpen van zwarte gaten.



Afbeelding 1. Lev Landau. Foto: Nobelstichting.

Wat een toestanden!

De quantummechanica is in zekere zin een theorie van kansrekening. In de klassieke natuurkunde beschrijven we een fysisch systeem in termen van de verschillende toestanden waarin het systeem kan zijn. Dat klinkt ingewikkeld, maar denk aan een bal die over een tafeloppervlak rolt: je kunt de ’toestand’ van die bal beschrijven met behulp van een aantal getallen: een x- en een y-coördinaat die aangeven waar de bal zich op de tafel begint, twee getallen die de grootte en de richting van de snelheid weergeven, en eventueel nog getallen om aan te geven of de bal tijdens het rollen ‘spint’ of niet, en hoe snel. Geef iemand een serie van zulke getallen, en je hebt hem of haar alle benodigde informatie gegeven om precies te reconstrueren waar de bal is en hoe die beweegt. De getallen bepalen dus de *toestand* van de bal volledig.

In de quantummechanica werkt dat heel anders. De quantummechanica kent namelijk superposities: een systeem kan ‘een beetje in de ene en een beetje in de andere toestand’ zijn. Een ‘quantumbal’ (denk aan een elektron die rond een atoomkern draait) kan op verschillende plekken op een ‘quantumtafelblad’ zijn – of in termen van het elektron: het kan zich deels in de ene baan, en deels in de andere baan bevinden.

Hoe moet je je dat voorstellen? We zien – zolang we niet te veel drinken – in het dagelijks leven nooit een bal zowel op de ene als op de andere plek op een tafelblad liggen. Kunnen we een elektron dan wél op twee plaatsen tegelijk zien? Het antwoord is: nee! De twee (of meer) plaatsen worden door de quantummechanische theorie namelijk elk voorzien van een *kans,* en als we het elektron nu gaan ‘bekijken’ – met andere woorden: gaan meten waar het zich bevindt, bijvoorbeeld door te zien hoe licht geabsorbeerd wordt – vertelt de quantummechanica ons de kans dat we het elektron in baan 1 zullen vinden en de kans dat we het elektron in baan 2 zullen vinden.

Je hebt kansen… en kansen

In eerste instantie klinkt het bovenstaande misschien alsof de quantummechanica een incomplete theorie is. Het lijkt erop dat de theorie ons alleen maar de *kans* vertelt in welke toestand we een systeem zullen aantreffen – maar niet in welke toestand een systeem ‘echt’ is. Een van de belangrijkste ontdekkingen uit de quantummechanica in de eerste helft van de 20e eeuw was echter dat dat niet het geval is: als we de verschillende kansen weten die de quantummechanica ons vertelt, weten we *alles wat er over het systeem te weten valt*! Met andere woorden: superposities zijn ‘echt’: een quantumdeeltje is, voor we er een meting aan doen, echt op meerdere plekken tegelijk.

Dat klinkt bizar, maar we kennen ditzelfde verschijnsel in een veel alledaagser geval: licht wat op een glazen ruit valt. Dat licht bestaat uit fotonen – lichtdeeltjes – en het ‘zien’ van iets gebeurt doordat zulke fotonen op je netvlies vallen. Wat we ook weten is dat ruiten spiegelen: als het buiten donker is en je bevindt je in een kamer, kun je in de weerspiegeling in de ramen voorwerpen zien die bij je in de kamer staan. Iemand die buiten langsloopt kan diezelfde voorwerpen echter óók zien. Het raam lijkt dus een deel van de lichtdeeltjes door te laten en een deel ervan te weerkaatsen, maar de werkelijkheid is complexer: élk individueel foton heeft een kans om door het raam heen te gaan en een kans om weer terug te kaatsen, en pas als iemand binnen of buiten probeert iets te zien (een meting doet) wordt bepaald welke van die twee kansen gerealiseerd wordt. Je kunt dit ‘experiment’ dus doen met een perfect gladde ruit, en met lichtdeeltjes die allemaal op exact dezelfde manier uit exact dezelfde lichtbron weggezonden worden, en nog steeds zal de helft van de fotonen binnen gezien worden, en de helft buiten! Er is geen fysisch verschijnsel wat het ene foton de ene en het andere de andere kant op stuurt; er is sprake van een zuiver, fundamenteel kansproces dat elk foton ondergaat.

We zeggen ook wel dat de quantumkansen niet een kwestie zijn van *onwetendheid*, maar een kwestie van *onbepaaldheid*. Er is dus een verschil tussen een (onbepaalde) quantumkans, en de kans die je beschrijft als je zegt ‘als ik met een dobbelsteen gooi heb ik een kans van 1 op 6 om drie te gooien’. Die laatste kans komt voort uit onwetendheid: als je héél precies zou weten hoe hard je de dobbelsteen gooit, over welk soort oppervlak, of er eventuele luchtstromen zijn, enzovoort, zou je precies uit kunnen rekenen of je wel of niet drie zult gooien. Maar omdat je al die dingen alleen maar ongeveer weet, kun je dat niet, en kun je de uitkomst alleen maar als een kans beschrijven. Zo’n ‘klassieke kans’ heeft dus heel andere eigenschappen dan een quantumkans!

Afbeelding 2. Klassieke kansen of quantumkansen? De kansen die je tegenkomt als je met een dobbelsteen gooit zijn heel anders dan de kansen in de quantumwereld! Foto: Wikipedia-gebruiker Diacritica.

Kans op kans

Hier komt het idee van Landau om de hoek kijken – een idee dat hij in 1927, als piepjonge 19-jarige natuurkundige bedacht. Hetzelfde concept werd overigens in hetzelfde jaar ook door John von Neumann ontwikkeld – en door hem veel systematischer uitgewerkt – maar Landau en von Neumann waren op dat moment niet van elkaars idee op de hoogte.

Landau vroeg zich af: kunnen we de twee kansbegrippen combineren? Wat als een quantumsysteem niet alleen in een superpositie is, maar als we bovendien door ‘klassieke onwetendheid’ óók niet weten in welke superpositie het precies is? Hoe beschrijf je zo’n systeem dan?

Een eerste vraag moet misschien zijn: *waarom* zou je zo’n systeem willen beschrijven? Op die vraag zijn antwoorden te over. Denk bijvoorbeeld aan gepolariseerd licht. Ook de polarisatie van licht is een quantumtoestand; of één enkel foton wel of niet door een polaroidbril heen komt, is een zuiver quantummechanisch kansproces. Die quantumkansen worden in zonnebrillen nuttig gebruikt: een deel van de fotonen van de zon komt wel door de bril heen (zodat je iets kunt zien), een ander deel niet (zodat je niet verblind wordt). Elk foton is in een superpositie van ’toestand die wel door de bril komt’ en ’toestand die niet door de bril komt’, en het bijbehorende kansproces filtert een deel van het licht uit.

Maar… niet elk foton van de zon is in precies *dezelfde* superpositie. Het ene foton is meer op de ene manier gepolariseerd, het andere meer op de andere. Een willekeurig foton kun je dus alleen beschrijven door aan elke superpositie een bepaalde kans toe te kennen, net zoals je dat voor elke zijde van de dobbelsteen deed.

De dichtheidsmatrix

Hier spelen klassieke én quantumkansen dus een rol – en Landau vroeg zich af: hoe réken je nu met zulke gecombineerde kansen? Wat hij besefte was dat je, om één willekeurig foton te beschrijven, nu maar liefst *vier* getallen nodig hebt. Je kunt van de twee basistoestanden ‘komt wel door de bril’ en ‘komt niet door de bril’ en quantum-superpositie maken door aan elk van die twee een quantumkans toe te kennen, maar vervolgens moet je ook nog beschrijven hoeveel fotonen zich in de ene superpositie bevinden en hoeveel in de andere – wat dus de *klassieke* kansen zijn. Landau ontdekte dat het bij *twee* basistoestanden voldoende is om van *twee* superposities de klassieke kans te weten, en dat je dan alle andere kansen kunt uitrekenen. Daarvoor zijn dus twee keer twee is vier kansen nodig – en als er drie basistoestanden waren zou je er drie keer drie is negen nodig hebben, enzovoort.

Het bleek heel praktisch om die twee keer twee, of drie keer drie, of tien keer tien getallen in een tabel te zetten – oftewel: een [matrix] – en vervolgens met die matrix aan het rekenen te slaan. Net als losse getallen kun je ook matrices optellen en vermenigvuldigen, en het bleek dat daarmee een prachtig ‘boekhoudkundig’ middel was gevonden om met de wirwar aan kansen van ‘onbekende’ quantumsystemen te rekenen.

Afbeelding 3. Het Landau-instituut. Het instituut voor theoretische fysica in Moskou is – hoe kan het ook anders – vernoemd naar Lev Landau. Foto: Zac Allan.

Van quantummechanica naar zwarte gaten

De dichtheidsmatrix, zoals de tabel van getallen ging heten, bleek echter veel meer dan alleen een handig rekenhulpmiddel. Je kon er heel goed allerlei fysische processen mee beschrijven en begrijpen waarvoor dat zonder die matrix heel lastig zou zijn. Een voorbeeld dat ook vandaag de dag nog keer op keer in de natuurkunde terugkomt is dat van deeltjes die in zwarte gaten vallen. Eén zo’n deeltje kan natuurlijk al door quantumkansen beschreven worden, maar *paren* van deeltjes zijn in dit opzicht nog veel interessanter. Zulke paren kunnen namelijk bepaalde eigenschappen delen – zoiets noemen we verstrengeling, een onderwerp dat in veel artikelen op deze site terugkomt. Het bekendste voorbeeld: als twee deeltjes bij een botsing van andere, niet-draaiende deeltjes gevormd worden, kunnen de nieuw ontstane deeltjes wél draaien, zolang ze dat maar ‘gemiddeld niet doen’. Als het ene deeltje dus linksom tolt zal het andere even snel rechtsom tollen, en omgekeerd. Als dit op de quantumschaal gebeurt is er weer sprake van een superpositie: één gevormd deeltjespaar zal met bepaalde kansen zowél links-rechts als rechts-links tollen.

Dit deeltjespaar wordt dus wel beschreven met ‘onbepaalde’ kansen, maar niet met ‘onbekende’ kansen: het is in wat we een ‘zuivere’ toestand noemen: wel in een superpositie, maar in principe kunnen we heel precies weten in wélke superposite. Gooi nu echter één van de twee deeltjes in een zwart gat, en de situatie verandert drastisch. Het verdwenen deeltje is abrupt uit ons natuurkundige systeem verdwenen: we kunnen het op geen enkele manier meer bereiken. We kunnen er dus ook niet aan meten om de kansen in de superpositie te bepalen. Effectief hebben we daardoor onwetendheid ingevoerd: het andere deeltje heeft nu een kans om rechtsom te tollen en een kans om linksom te tollen, maar in onze wereld buiten het zwarte gat zijn we onwetend geworden over welk van de twee we zullen meten. We hebben nu dus geen andere keus dan dat deeltje beschrijven met een dichtheidsmatrix!

Dichtheidsmatrices zijn daarmee onmisbaar in het beschrijven van quantumsystemen waarin zwarte gaten betrokken zijn. Ze spelen bijvoorbeeld een cruciale rol in het begrip van de informtieparadox: de vraag of de informatie over het deeltje dat ín het zwarte gat is gevallen nu voorgoed verloren is, of uiteindelijk toch nog door iemand buiten het zwarte gat achterhaald kan worden. Wil je daar meer over weten, lees dan bijvoorbeeld het artikel van Joris Kattemölle over de firewall-paradox nog eens; de verschillende soorten kansen die daarin beschreven worden zijn precies de kansen waarop je met behulp van een dichtheidsmatrix vat kunt krijgen.

De dichtheidmatrix was maar één van de vele natuurkundige ideeën van Lev Landau; hij werkte ook aan supervloeibaarheid (waarvoor hij zoals gezegd de Nobelprijs kreeg), supergeleiding, plasma-fysica, diamagnetisme, en nog talloze andere onderwerpen. De dichtheidsmatrix is dus niet eens zijn belangrijkste of beroemdste bijdrage aan de wetenschap – maar het is er wel één die vele fysici dag in dag uit gebruiken.