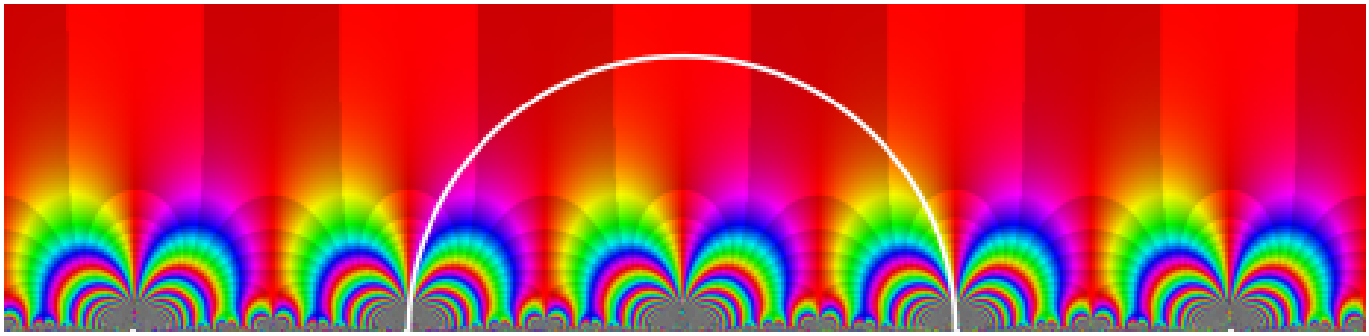
Modulaire vormen

Dat symmetrie een belangrijk concept is in de theoretische natuurkunde, zal een trouwe Quantum Universe-lezer niet ontgaan zijn. Er zijn al veel artikelen over dit onderwerp op de website verschenen – het woord 'symmetrie' wordt in maar liefst 144 QU-artikelen genoemd – en toch is er nog altijd meer over te schrijven. We duiken in een stukje van de wiskunde dat bol staat van de symmetrieën, en dat veelvuldig opduikt in de quantumveldentheorie en de snaartheorie: *modulaire vormen*.

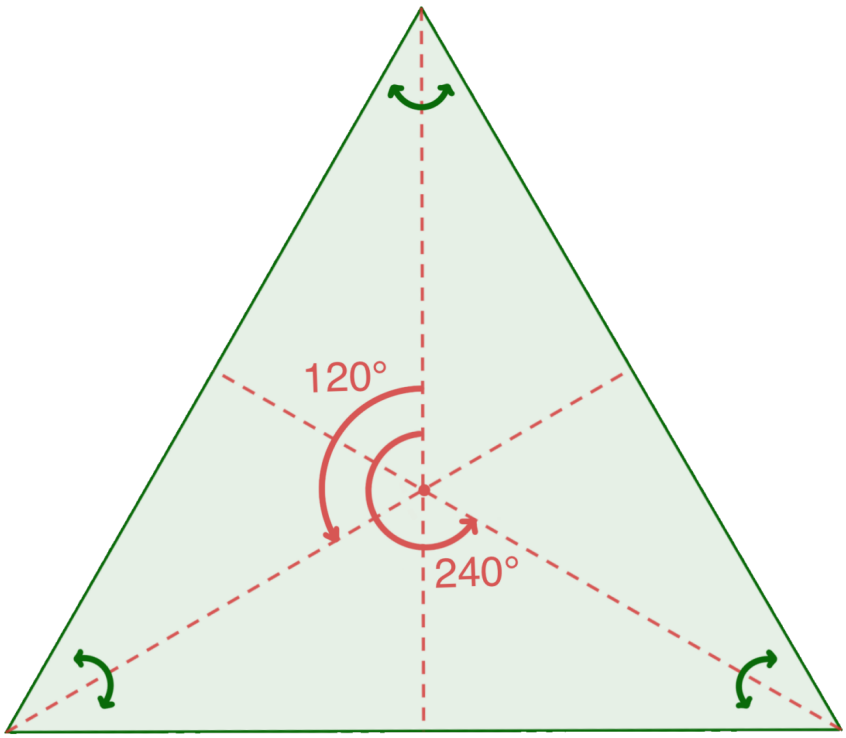


Volgens de overlevering heeft wiskundige Martin Eichler ooit gezegd dat er vijf fundamentele wiskundige operaties zijn: optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen en modulaire vormen. Los van de vraag of Eichler dit echt zó gezegd heeft, moet de uitspraak niet al te letterlijk worden opgevat. De clou van de grap is dat modulaire vormen een heel ander soort wiskundige bewerkingen zijn dan de andere vier in het rijtje. Optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen maken – op relatief eenvoudige wijze – van twee getallen één nieuw getal. Modulaire vormen daarentegen zijn een bepaald soort wiskundige functies, die één getal via een ingewikkeldere transformatie op een nieuw getal afbeelden. Wél duiken ze op allerlei plekken op in de wiskunde en theoretische natuurkunde. In die zin zijn ze wellicht bijna net zo essentieel als optellen en vermenigvuldigen.

Symmetrische functies

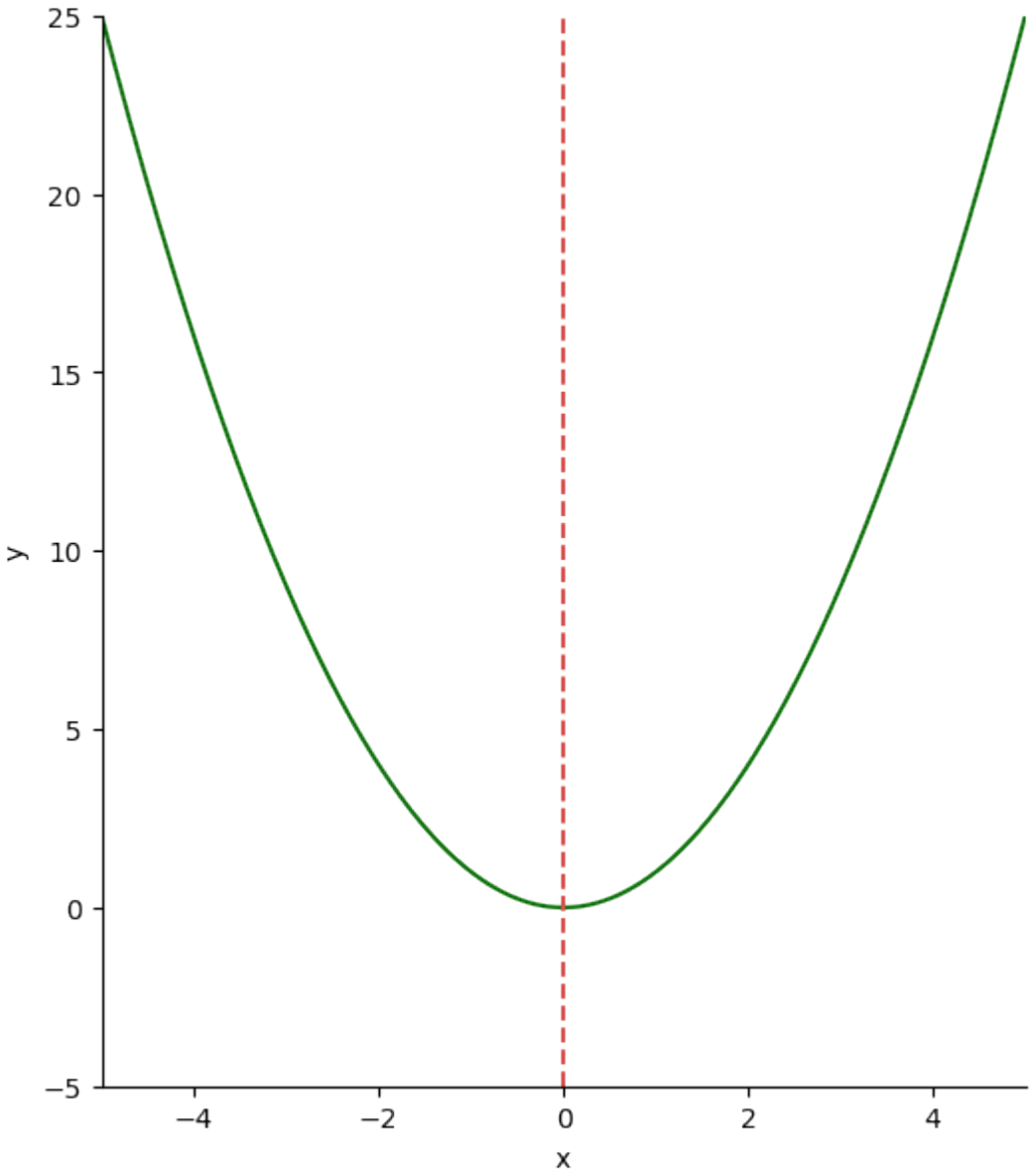
Wat modulaire vormen bijzonder maakt, is hun hoge mate van symmetrie. Om daar een beetje gevoel bij te krijgen, kun je denken aan een meetkundig voorbeeld, zoals een

gelijkzijdige driehoek. Als we die over 120 graden draaien om zijn middelpunt, krijgen we precies dezelfde driehoek terug. Nog eens 120 graden draaien in dezelfde richting – in totaal 240 graden dus – levert opnieuw hetzelfde beeld op. Ook een spiegeling in een zwaartelijn, die een hoekpunt verbindt met het midden van de overstaande zijde, laat de driehoek onveranderd. Roteren en spiegelen zijn dus symmetrieën van de driehoek: transformaties die het object op zichzelf afbeelden.



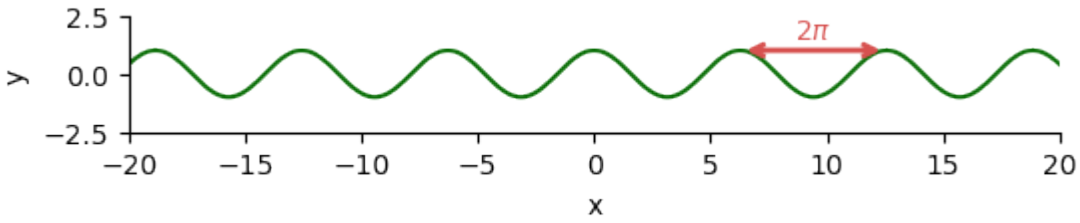
Symmetrieën van een gelijkzijdige driehoek. Een rotatie over 120 of 240 graden beeldt de driehoek weer op zichzelf af. Ook een spiegeling in een zwaartelijn verandert het beeld niet.

Wiskundige functies kunnen ook symmetrieën hebben. Denk bijvoorbeeld aan de functie \(f(x) = x^2 \), die iedere invoerwaarde met zichzelf vermenigvuldigt. Voor elke waarde van \(x \) geven \(x \) en \(-x \) dezelfde uitkomst. Een negatief getal in het kwadraat wordt immers weer positief. Als we de grafiek van deze functie spiegelen in de \(y \)-as (\(x=0 \)), dan verandert er dus niets.



Grafiek van $f(x) = x^2$. De functie is invariant onder spiegeling in de lijn $x = 0$.

Een ander bekend voorbeeld van een functie met symmetrie is de cosinus, $f(x) = \cos(x)$. Voor x tussen 0 en 2π (in radialen gemeten, dus 360 graden) is deze functie gedefinieerd als de verhouding tussen de aanliggende en de schuine zijde van een hoek van grootte x in een rechthoekige driehoek; daarbuiten wordt de functie periodiek herhaald. Deze periodieke herhaling betekent dat de cosinus een translatiesymmetrie heeft: een verschuiving van de invoer x met een veelvoud van 2π verandert de uitkomst niet.

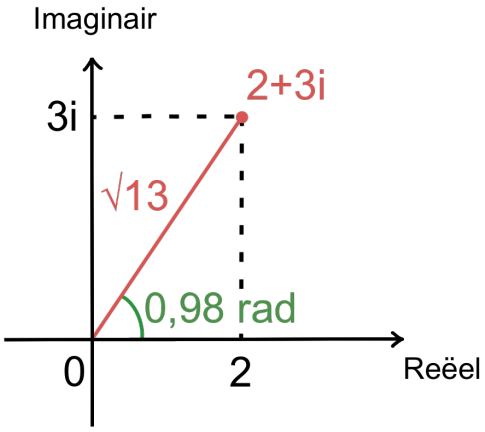


Grafiek van f(x) = cos(x). De functie is invariant onder verschuivingen van x met veelvouden van 2π.

Complexe getallen

Om nog interessantere symmetrieën te ontdekken, moeten we een stap verder gaan dan de gewone getallen. Complexe getallen worden beschreven door twee ‘gewone’ getallen: een *reële component* en een *imaginaire component*. Het volledige complexe getal is gelijk aan de som van deze twee componenten, waarbij de imaginaire component vermenigvuldigd wordt met i, het getal dat door wiskundigen gedefinieerd is als de wortel van -1. Een voorbeeld is het getal 2 + 3i, dat reële component gelijk aan 2 en imaginaire component gelijk aan 3 heeft.

Complexe getallen kunnen grafisch worden weergegeven door de twee componenten op te vatten als coördinaten. Net zoals we gewone getallen als punten op een getallenlijn kunnen weergeven, kunnen we complexe getallen dan weergeven als punten in een vlak. In veel gevallen is het nuttig om een andere beschrijving te gebruiken, in termen van *poolcoördinaten*. Hierbij wordt een complex getal niet beschreven door zijn reële en imaginaire component, maar door zijn afstand tot de oorsprong (het getal 0) en de hoek die het punt dat het getal weergeeft maakt met de horizontale as. Voor 2 + 3i betekent dat een afstand van √13 (gebruik de stelling van Pythagoras) en een hoek van ongeveer 0,98 radialen (56 graden).

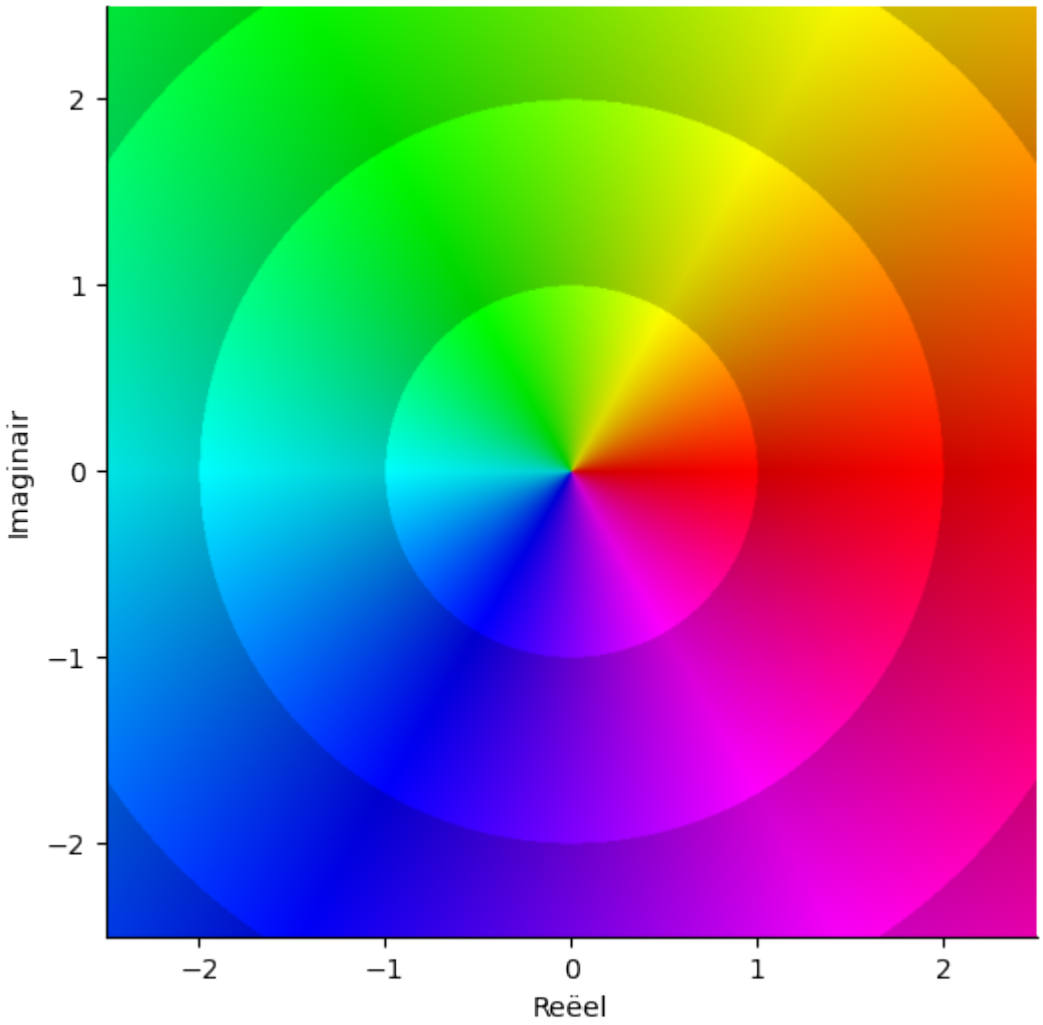


Het complexe vlak. Een complex getal kan worden weergeven als punt in een vlak, met het reële deel langs de horizontale as en het imaginaire deel langs de verticale as.

Een voordeel van de poolcoördinaten is dat het vermenigvuldigen van complexe getallen een stuk eenvoudiger wordt. Om het getal 1 + i met zichzelf te vermenigvuldigen, moeten we de haakjes wegwerken van (1+i)(1+i), en gebruik maken van het feit dat $i^2 = -1$. Het resultaat – reken het vooral na! – is dan 2i. In poolcoördinaten kunnen we simpelweg de afstanden vermenigvuldigen en de hoeken optellen[1]. Dit geeft direct een afstand van 2 en een hoek van π/2 (90 graden), wat inderdaad overeenkomt met 2i.

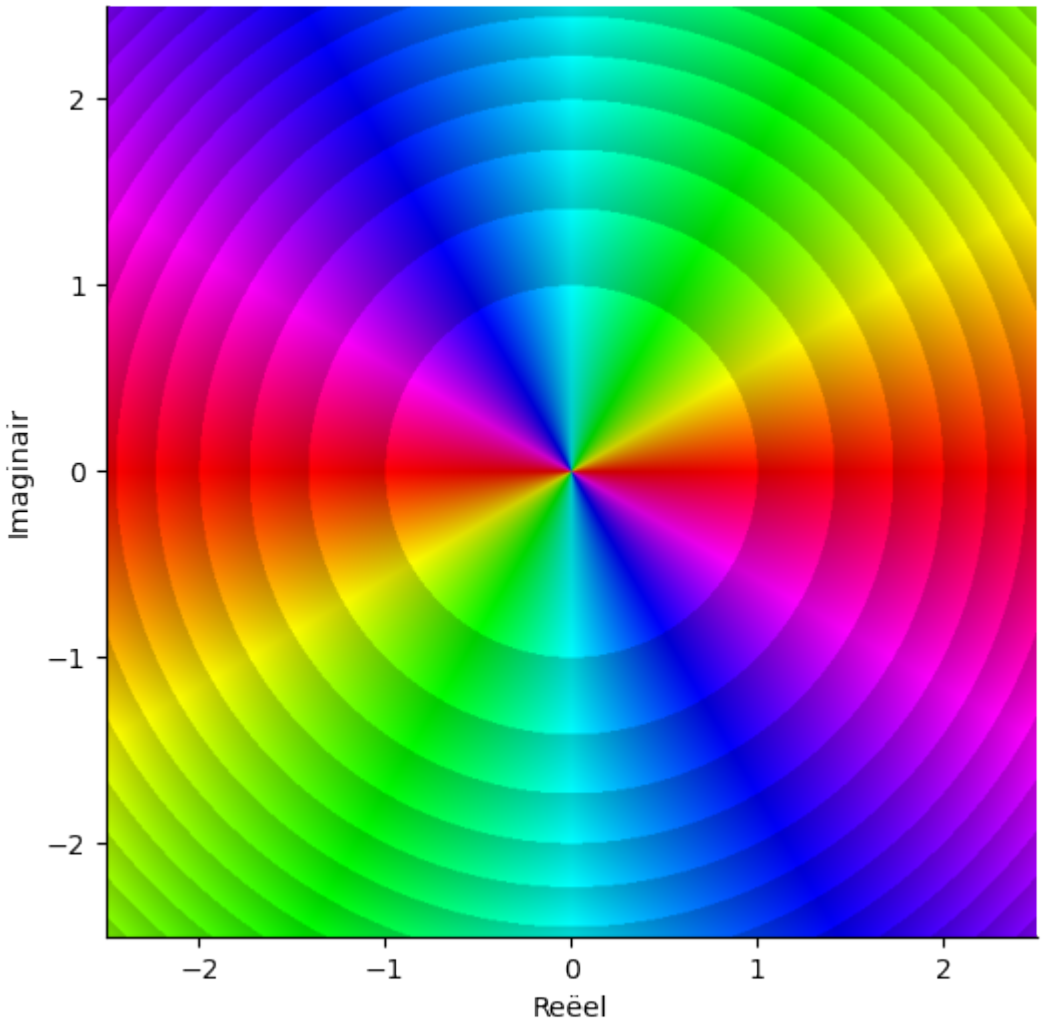
Functies in het complexe vlak

Complexe functies, waaronder modulaire vormen, hebben zowel complexe invoerwaarden als complexe uitkomsten. Om zulke functies weer te geven op vergelijkbare manier als de grafieken van ‘gewone’ functies, zouden vier assen nodig zijn: twee voor de invoerwaarden en twee voor de uitkomsten. Dat is lastig te visualiseren. In plaats daarvan kunnen we gebruik maken van kleur om de uitkomsten weer te geven, door het complexe vlak te kleuren als een regenboog. Op ieder punt in het vlak correspondeert de kleur met de hoek van het getal in poolcoördinaten, bijvoorbeeld rood voor een hoek van 0 graden, groen voor een hoek van 90 graden, enzovoorts. Daarnaast kunnen contourlijnen worden getekend om punten met gelijke afstand tot de oorsprong weer te geven, zoals hoogtelijnen op een kaart. De functie $f(x) = x$, die iedere invoerwaarde naar zichzelf stuurt, ziet er dan als volgt uit.



Visualisatie van de complexe functie f(x) = x. De kleuren corresponderen met de hoeken van de complexe getallen; de cirkels geven punten met gelijke afstand tot de oorsprong weer.

Met deze weergave van \(f(x) = x \) als referentie, kunnen we nu ook ingewikkeldere functies visualiseren. De functie \(f(x) = x^2 \) ziet er bijvoorbeeld uit zoals hieronder. In deze afbeelding zien we weer de symmetrie van de functie: de invoerwaardes \(x \) en \(-x \) hebben dezelfde afstand tot de oorsprong, maar hoeken die verschillen met 180 graden. We zien in de afbeelding dat punten die 180 graden met elkaar verschillen inderdaad dezelfde kleur hebben.



Visualisatie van de complexe functie $f(x) = x^2$. Elke kleur komt twee keer voor, omdat kwadrateren de hoek verdubbelt. Daarnaast zijn er meer contourlijnen, omdat de uitkomsten sneller groeien.

Oneindig veel symmetrie

Tot nu toe heeft de stap naar complexe getallen ons nog niet veel meer opgeleverd dan mooie plaatjes. De functie \(f(x) = x^2 \) is immers ook al invariant onder de verwisseling van \(x \) en \(-x \) als we die functie alleen toepassen op ‘gewone’ getallen \(x \). Om te zien wat deze stap naar complexe getallen ons werkelijk oplevert, kijken we naar een voorbeeld waarin die nieuwe symmetrieën volledig tot hun recht komen:

$$f(x) = e^{2\pi i x}\prod_{n=1}^\infty (1-e^{2\pi i n x})^{24}.$$

Deze functie ziet er een stuk ingewikkelder uit, maar blijkt verrassend mooie symmetrie-

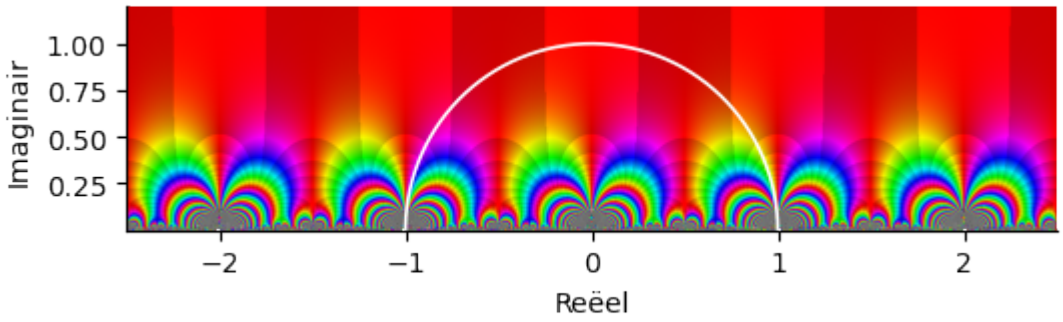
eigenschappen te hebben. Als eerste heeft de functie, net als de cosinus, translatiesymmetrie: een verschuiving van \(x \) met 1 (en dus ook met een willekeurig geheel getal) verandert de uitkomst niet. Oftewel:

$$f(x+1) = f(x).$$

Daarnaast kunnen we de functie inverteren (een soort spiegeling) in de cirkel met middelpunt in de oorsprong en straal 1. Deze transformatie klinkt misschien ingewikkeld, maar komt voor complexe getallen overeen met het verwisselen van \(x \) en \(-1/x\). Het complexe getal 2i wordt bijvoorbeeld verwisseld met i/2, en het complexe getal 2 met -1/2. Bij de invoerwaarden \(x \) en \(-1/x \) geeft de functie echter niet exact dezelfde uitkomst, maar zijn de uitkomsten wel op eenvoudige wijze aan elkaar gerelateerd. Om precies te zijn:

$$f\left(-\frac{1}{x}\right) = x^{12} f(x).$$

We kunnen de symmetrietransformaties ook combineren – bijvoorbeeld een verschuiving, gevolgd door een spiegeling en tot slot nóg een verschuiving. Op deze manier zijn er oneindig veel combinaties (de zogeheten *modulaire transformaties*) te maken waaronder de functie op mooie wijze transformeert. De enorme hoeveelheid van 'modulaire symmetrieën' die dit oplevert, wordt duidelijker in onderstaande visualisatie.



Visualisatie van de modulaire discriminant. De functie is invariant onder verschuivingen van de invoer met een geheel getal en transformeert op eenvoudige wijze onder inverteren in de cirkel rondom de oorsprong met straal 1 (de witte lijn).

De functie wordt de *modulaire discriminant* genoemd en is een voorbeeld van een *modulaire vorm*: een complexe functie met een zeer strikte vorm van symmetrie. Zulke functies blijven invariant, op een eenvoudige factor na, onder de hele familie van modulaire transformaties

die wordt opgebouwd uit verschuivingen van x naar $x + 1$ en inverteringen van x naar $-1/x$ in het complexe vlak. Die sterke symmetrie-eisen beperken de mogelijke functies enorm.

Modulaire vormen en natuurkunde

Op het eerste gezicht lijken dit soort functies vooral een speeltuin voor wiskundigen. Toch duiken modulaire vormen verrassend vaak op in de natuurkunde. Dat heeft alles te maken met symmetrie: net zoals de driehoek onveranderd blijft onder rotaties en spiegelingen, blijven ook natuurkundige systemen vaak invariant onder bepaalde transformaties. Modulaire vormen bieden een wiskundige taal om zulke symmetrieën precies te beschrijven.

Een belangrijk voorbeeld komt uit de snaartheorie, waarin deeltjes niet als kleine puntjes, maar als trillingen van snaren worden beschreven. De beweging van zo'n snaar in de ruimtetijd vormt een tweedimensionaal oppervlak. Dit oppervlak kan bijvoorbeeld de vorm hebben van een torus, oftewel het oppervlak van een donut. Wiskundig kan de vorm van één torus op veel verschillende manieren worden beschreven door een complex getal. Verschillende keuzes van dit complexe getal beschrijven dezelfde torus als ze aan elkaar gerelateerd zijn via een modulaire transformatie. De eis dat de natuurkunde onafhankelijk is van deze keuze in de wiskundige beschrijving, legt sterke beperkingen op aan de theorie. Het is dan ook niet zo verrassend dat de functies die daarbij een rol spelen precies modulaire vormen zijn: dat zijn immers precies de functies die zich netjes gedragen onder dit soort transformaties.

Ook in de quantumveldentheorie en statistische fysica verschijnen modulaire vormen op natuurlijke wijze. Zo kunnen grootheden zoals partitiefuncties, die gebruikt worden om microscopische toestanden in een theorie te tellen, modulaire symmetrie hebben (zie ook dit artikel). Deze symmetrie maakt het mogelijk om specifieke toestandsaantallen af te leiden uit de algemene partitiefunctie, wat bijvoorbeeld relevant is voor de microscopische beschrijving van zwarte gaten.

Misschien had Eichler dus toch een punt: modulaire vormen horen, op hun eigen manier, thuis tussen de meest fundamentele bouwstenen van de wis- en natuurkunde.

[1] De hoek van een complex getal is altijd kleiner dan 2π radialen. Op 2π beginnen we – net als bij klokkijken – weer bij 0. Bijvoorbeeld: 1,5π + π = 2,5π, oftewel 0,5π, want 2,5π-2π = 0,5π.