

Representatietheorie (1): Verzamelingenleer

Symmetrie vormt een sleutelbegrip in de moderne natuurkunde. Zo ligt door de symmetrie van de ruimte vast welke elementaire deeltjes zouden kunnen bestaan, komt elektromagnetisme voort uit een interne rotatiesymmetrie en worden de **kleuren** van quarks bepaald door de symmetrie van hun interactie. Vanuit wiskundig oogpunt wordt symmetrie beschreven door zogeheten *groepen* en *representaties*, maar hoe leidt dit tot natuurkunde? In deze nieuwe serie leg ik uit wat representatietheorie is en hoe deze wiskunde wordt gebruikt om de natuur te beschrijven.



Getallen. We beginnen deze serie met het ordenen van bijvoorbeeld getallen in nette verzamelingen. Afbeelding: [Freddy Dendoktoor](#).

Bij het bouwen van een nieuwe theorie brengt een natuurkundige een specifieke structuur

aan in het model, zodat de theorie precies beschrijft wat de natuurkundige voor ogen heeft. Voor een wiskundige is structuur zo mogelijk nog belangrijker dan voor een natuurkundige: in de wiskunde is de structuur namelijk het startpunt. Het eerste wiskundevak dat ik aan de universiteit heb gevolgd had zelfs de naam 'wiskundige structuren'. Een wiskundige begint met een structuur, en probeert zoveel mogelijk gevolgen van die structuur af te leiden.

Verzamelingen

Zo'n wiskundige structuur bestaat uit [axioma's](#) en definities, en de gevolgen komen voort uit logische denkstappen en bewijzen die op die bouwstenen gebaseerd zijn. Aan beginnende wiskundestudenten worden deze principes meestal uitgelegd met behulp van verzamelingenleer. Een *verzameling* bestaat uit een aantal bij elkaar gevoegde *objecten* (soms ook *elementen* genoemd), en wordt aangeduid met accolades $\{ \}$. Een voorbeeld is de verzameling

$$A = \{1, 2, 3\}$$

bestaande uit de getallen 1, 2 en 3. We zien dat A in totaal drie objecten bevat, maar een verzameling mag ook oneindig veel objecten bevatten, of leeg zijn. Dit laatste geval wordt aangeduid met het symbool $\emptyset$ en heet de *lege verzameling*. In principe kan een verzameling van alles bevatten, bijvoorbeeld ook andere verzamelingen. Zo is $B = \{1, \{1, 2\}\}$ een voorbeeld van een verzameling die een getal bevat en een verzameling die zelf weer uit twee getallen bestaat. Maar ook $\{\text{koe}, \text{varken}, \text{kip}\}$ is een verzameling, in dit geval een verzameling van boerderijdieren.

Om aan te duiden dat een object in een verzameling zit, wordt het symbool $\in$ gebruikt, wat staat voor 'in' of 'element van'. Bijvoorbeeld geldt er dat $2 \in A$, want 2 zit in A . Een *deelverzameling* is, zoals het woord al zegt, een verzameling van objecten die deel zijn van een andere verzameling en dat wordt aangeduid met het symbool $\subset$. Zo is de lege verzameling een deelverzameling van elke andere verzameling. In ons eerdere voorbeeld geldt $\{1, 2\} \subset A$, want zowel 1 als 2 zijn objecten in onze verzameling A . Er geldt echter niet dat $\{1, 2\} \subset B$, want het object '2' zit niet in B . Wat we wel zouden kunnen opschrijven is $\{\{1, 2\}\} \subset B$: de verzameling die alleen deze ene verzameling bevat is een deelverzameling van B , omdat B diezelfde ene verzameling ook bevat. Je ziet dat het taalgebruik nogal verwarrend kan worden – daarom ook de wiskundige

notatie, die als je er eenmaal aan gewend bent vaak veel helderder is!

Met verzamelingen kunnen we verschillende operaties uitvoeren. Zo kunnen we de *vereniging* van twee verzamelingen nemen, wat resulteert in een verzameling die zowel de objecten van de een als de objecten van de ander bevat. Zo'n vereniging wordt genoteerd met $\cup$, en een voorbeeld is

$$A \cup B = \{1, 2, 3, \{1, 2\}\}.$$

Een andere operatie is de *doorsnede* van twee verzamelingen, aangegeven met $\cap$. Deze operatie resulteert in de verzameling die alleen de objecten bevat die in *beide* verzamelingen voorkomen. Een voorbeeld is

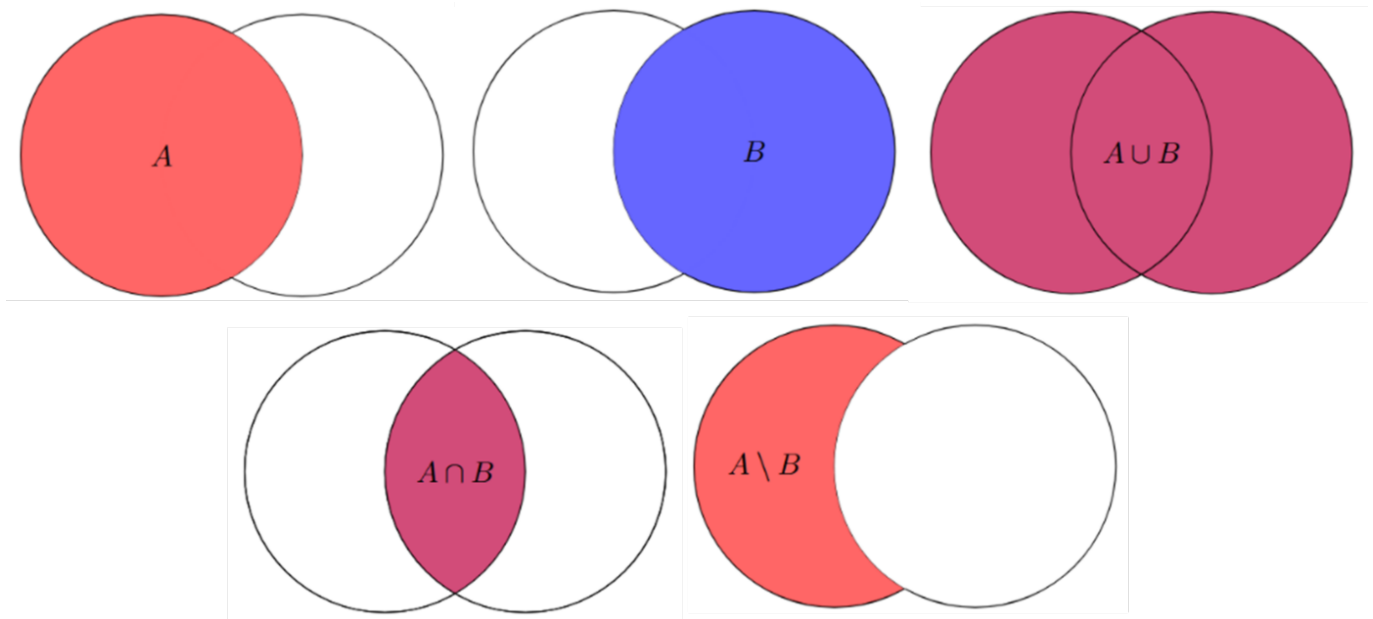
$$A \cap B = \{1\}.$$

Hierin zien we ook weer terug dat 2 geen object in B is (in wiskundige notatie: $2 \notin B$); lees: "2 niet in B ").

De laatste operatie die ik wil benoemen is het *verschil* tussen verzamelingen, aangeduid met het symbool $\setminus$. Deze operatie haalt uit de eerstgenoemde verzameling precies alle objecten die óók in de andere verzameling liggen weg. Een voorbeeld is

$$A \setminus B = \{2, 3\},$$

Dat wil zeggen: omdat 1 zowel in A als in B ligt, halen we 1 weg om het verschil tussen A en B te krijgen.



Afbeelding 1. Verzamelingen. Een schematische weergave van de verschillende operaties voor verzamelingen.

Belangrijke verzamelingen

Sommige verzamelingen komen zo vaak voor dat het handig is om ze een naam te geven. Een voorbeeld daarvan hebben we al gezien, namelijk de lege verzameling $\{\}$. Andere voorbeelden zijn al eerder beschreven op deze website, bijvoorbeeld in [dit artikel](#), maar ik zal ze nog even kort benoemen.

De *natuurlijke getallen*, de getallen waarmee kan worden geteld, worden aangeduid met het symbool $\mathbb{N}$, oftewel:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

Sommige wiskundigen vinden dat 0 ook een object in $\mathbb{N}$ moet zijn. Ikzelf reken 0 niet tot de natuurlijke getallen, en duid de natuurlijke getallen met 0 erbij aan met $\mathbb{N}_0$. Als we ook alle negatieve getallen toevoegen, krijgen we de *gehele getallen*, een verzameling aangeduid met $\mathbb{Z}$, dus

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

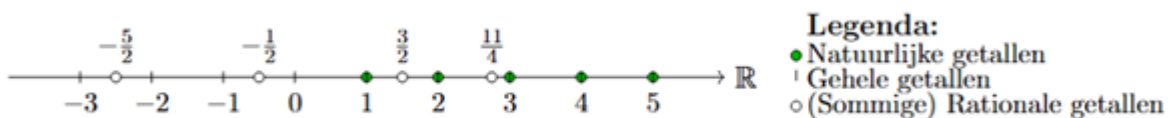
Vervolgens wordt de verzameling van alle breuken aangeduid met het symbool $\mathbb{Q}$, en die getallen worden de *rationale getallen* genoemd. Dat wil zeggen

$$\mathbb{Q} = \{ a/b \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N} \}.$$

Het symbool $\mid$ dat in de verzamelingnotatie hierboven staat, betekent ‘met’ of ‘zodanig dat’. Dus, in woorden staat hierboven: “de rationale getallen bevatten alle getallen van de vorm a/b gedeeld door b met a een geheel getal en b een natuurlijk getal”.

De *reële getallen* zijn alle getallen op de reële lijn, dus alles tussen ‘min oneindig’ en ‘plus oneindig’, en die verzameling wordt aangeduid met het symbool $\mathbb{R}$. In verzamelingnotatie is dat

$$\mathbb{R} = \{ x \mid -\infty < x < \infty \}.$$



Afbeelding 2. De getallenlijn. De getallenlijn met daarop de natuurlijke getallen, gehele getallen en een paar rationale getallen aangegeven.

Ten slotte zijn er nog de *complexe getallen*, aangeduid met het symbool $\mathbb{C}$. Over de complexe getallen is eerder al [een serie artikelen](#) verschenen op deze website, waarin wordt uitgelegd hoe met complexe getallen kan worden gerekend. Het belangrijkste is dat er een nieuw element i aan de reële getallen wordt toegevoegd, wat kwadrateert tot -1 , dus $i^2 = -1$. De reële getallen bevatten zo’n getal nog niet (een kwadraat van een reëel getal is altijd positief of nul) en dus valt dit getal i ‘buiten de getallenlijn’. Complexe getallen zijn onmisbaar voor de natuurkunde, hoewel er in natuurkundige berekeningen altijd moet worden gezorgd dat de uitkomst een reëel getal is, anders vind je een uitkomst die niet een meetbaar (reëel) getal is, en weet je dus dat je ergens een fout hebt gemaakt! De complexe getallen schrijven we in verzamelingnotatie als

$$\mathbb{C} = \{ a+bi \mid a, b \in \mathbb{R} \}.$$

Merk op dat, door $b=0$ te kiezen, de reële getallen een deelverzameling vormen van de complexe getallen. Alle andere complexe getallen vind je door bij die reële getallen een willekeurig aantal maal i op te tellen.

We hebben dus de volgende reeks inclusies:

$$\{\emptyset\} \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

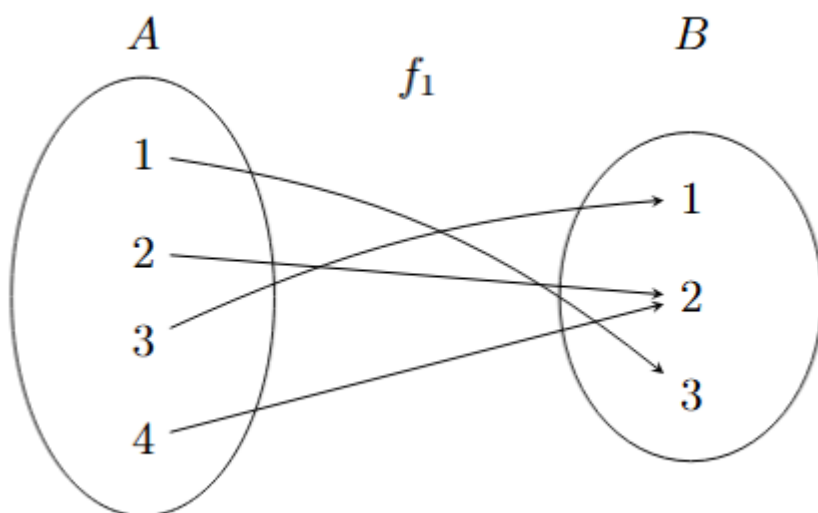
Functies

We laten nu (A) en (B) weer willekeurige verzamelingen zijn, in plaats van de specifieke verzamelingen die ik aan het begin van dit artikel heb gedefinieerd. Een *functie* $(f: A \rightarrow B)$ is een afbeelding die aan elk element van (A) één element uit (B) toekent. De verzameling (A) heet het *domein* van (f) , en de verzameling (B) heet het *codomein*.

Ik zal een paar voorbeelden van functies geven. Een flauw voorbeeld is de functie $(f: A \rightarrow A)$ die niets doet, dat wil zeggen: $(f(a)=a)$ voor alle $(a \in A)$. Dit heet de *identiteitsfunctie* van (A) , en die functie wordt genoteerd met (I_A) . Een wat minder flauw voorbeeld is $(f_1: \{1,2,3,4\} \rightarrow \{1,2,3\})$ gegeven door

$$(f_1(1)=3, \quad f_1(2)=f_1(4)=2, \quad f_1(3)=1.)$$

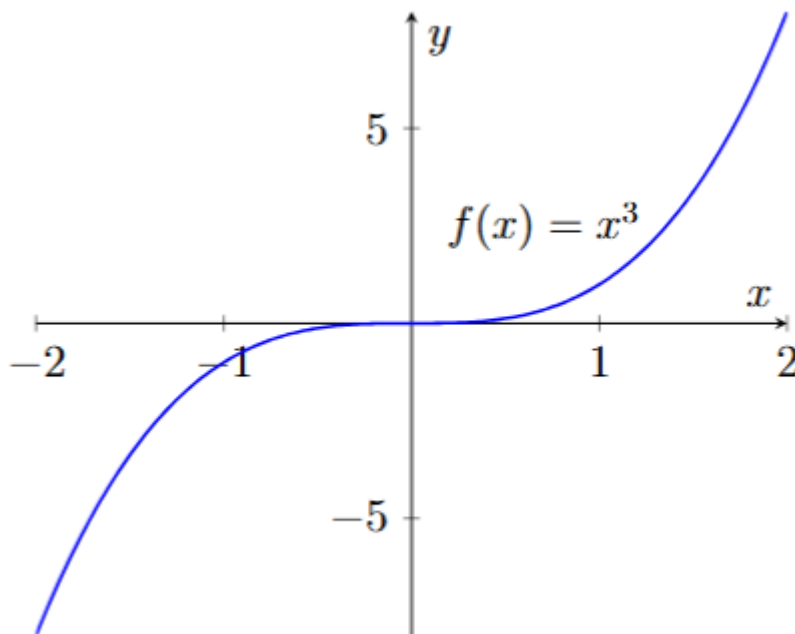
Dit kunnen we weergeven met behulp van een afbeelding:



Afbeelding 3. Een functie. Schematische weergave van de functie f_1 .

Een ander voorbeeld is $(f_2: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z})$ gegeven door $($

$f_2(n) = -n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Die functie stuurt elk natuurlijk getal naar zijn negatieve variant in de gehele getallen. Een vierde voorbeeld is de functie $f_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = x^3$. Ook van deze laatste functie kunnen we een mooi plaatje maken.



Afbeelding 4. De derde macht. De grafiek van de functie $f(x) = x^3$.

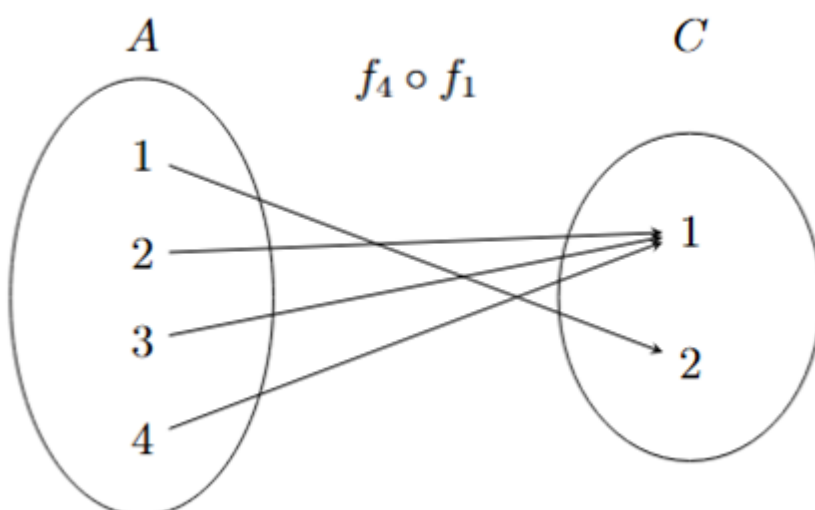
Het *beeld* van een object in het domein is het object in het codomein waar het object in kwestie heen wordt gestuurd door de functie. Zo is van $1 \in \{1, 2, 3, 4\}$ het beeld onder de functie f_1 gelijk aan $3 \in \{1, 2, 3\}$. Het *beeld* of *bereik* van een functie zijn alle objecten in het codomein van de functie die bereikt worden door de functie. Een functie is *surjectief* als het beeld gelijk is aan het codomein. In dat geval bereikt de functie dus elk object in (B) . In bovenstaande voorbeelden zien we dat f_1 en f_3 surjectief zijn, maar f_2 niet: de positieve getallen worden daar niet bereikt.

Een andere mogelijke eigenschap van een functie, naast surjectiviteit, is *injectiviteit*. Een functie heet injectief als geen twee objecten in het domein hetzelfde beeld hebben. Dat wil zeggen, voor elk tweetal elementen $a, b \in A$ geldt dat $f(a) \neq f(b)$. In bovenstaande voorbeelden zien we dat f_1 niet injectief is, omdat $f_1(2) = f_1(4)$, maar f_2 en f_3 zijn wel injectief. Voor f_3 betekent dat dus: er zijn geen twee reële getallen die dezelfde derde macht hebben. Kun je zelf inzien dat dat waar is? En begrijp je dan ook

waarom ik dus als voorbeeld de derde macht heb gekozen, en niet bijvoorbeeld het kwadraat?

Een functie die zowel injectief als surjectief is, wordt *bijjectief* genoemd. In de bovenstaande voorbeelden is alleen de functie f_3 bijjectief. Bijjectieve functies zijn bijzonder, omdat ze *inverteerbaar* zijn. Dat wil zeggen, er bestaat een functie die precies de omgekeerde werking heeft. De functie die dit doet heet de *inverse*, en die inverse functie wordt genoteerd met f^{-1} . Voor f_3 is de inverse gegeven door $f_3^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$. Inderdaad, als we voor $x \in \mathbb{R}$ eerst f_3 toepassen, krijgen we x^3 . Als we vervolgens f_3^{-1} toepassen, komen we weer uit in $\sqrt[3]{x^3} = x$. Andersom werkt ook: als we eerst f_3^{-1} toepassen en daarna pas f_3 dan komen we ook weer uit in het punt waar we begonnen. De functie f_3^{-1} keert dus de werking van f_3 om.

Wat we hierboven eigenlijk hebben gedaan, is $f_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en $f_3^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ *samenstellen* tot een nieuwe functie – in dit geval de identiteitsfunctie. Meer algemeen kunnen functies $f: A \rightarrow B$ en $g: B \rightarrow C$ worden samengesteld. Dit geeft een functie die wordt genoteerd als $g \circ f: A \rightarrow C$. Een leuke opgave voor de lezer is om een functie $f_4: \{1,2,3\} \rightarrow \{1,2\}$ te bedenken waarvoor het resultaat van de samenstelling $f_4 \circ f_1$ wordt gegeven door onderstaande afbeelding:



Afbeelding 5. De samenstelling van twee functies.

De samenstelling van de functies f_4 en f_1 voor een

bepaalde functie f_4 .

Wat we hierboven concludeerden over inverteerbaarheid, is dat als $(f: A \rightarrow B)$ bijectief is, er een functie $(f^{-1}: B \rightarrow A)$ bestaat zodat $(f \circ f^{-1} = I_B: B \rightarrow B)$ en $(f^{-1} \circ f = I_A: A \rightarrow A)$.

Vooruitblik

We zien dat er al veel interessants valt te zeggen over verzamelingen en functies tussen verzamelingen. Het vakgebied verzamelingenleer gaat zelfs nog veel verder. Het blijkt dat hierin allerlei paradoxale uitspraken mogelijk zijn, en dat verzamelingen, zeker oneindig grote, zich niet altijd gedragen zoals je intuïtief zou verwachten. Ik zal daar in dit artikel niet verder op ingaan, omdat zulke paradoxen ons niet in de weg zullen zitten voor ons eigenlijke doel: representatietheorie.

In allerlei gebieden van de wiskunde worden extra eisen gesteld aan verzamelingen en functies tussen deze verzamelingen. In de volgende twee artikelen zal ik uitlichten wat ik daarmee bedoel, door iets te vertellen over *lineaire algebra* en *groepentheorie*. Zodra we daar meer over weten, kan ik vertellen wat een representatie is, en wordt duidelijk hoe dit op zijn beurt weer te maken heeft met symmetrie en elementaire deeltjes.

Antwoord op de vragen:

Twee verschillende getallen kunnen nooit dezelfde derde macht hebben omdat de grafiek van de derde macht altijd stijgt: als je van links naar rechts langs de reële getallenlijn loopt worden de derde machten ook steeds groter – je komt dus nooit meer terug bij dezelfde derde macht.

De kwadratische functie heeft die eigenschap niet: links van 0 daalt die functie, en rechts van nul stijgt de functie weer. Daardoor hebben -2 en +2 bijvoorbeeld hetzelfde kwadraat.

De functie $(f_4: \{1,2,3\} \rightarrow \{1,2\})$ die afbeelding 5 geeft, is gegeven door $(f_4(1)=f_4(2)=1)$ en $(f_4(3)=2)$.