Schwarzschild en het raadsel van Mercurius

In deze wandeling door de wetenschapsgeschiedenis vertel ik je over het ontstaan van de algemene relativiteitstheorie en de belangrijke rol die de afwijkende baan van Mercurius daarbij speelde. Een cruciale schakel in deze ontwikkelingen was Karl Schwarzschild, die tijdens de Eerste Wereldoorlog vanuit het front de eerste exacte oplossing van Einsteins nieuwe zwaartekrachtsvergelijkingen vond. Pas vele decennia later werd duidelijk wat Schwarzschild daarmee werkelijk had berekend: een zwart gat.

Afbeelding 1. Het Eise Eisinga-planetarium. Het planetarium van Eise Eisinga in Franeker, gebouwd tussen 1774 en 1781. Het mechanische model laat de beweging van de planeten in het zonnestelsel zien en is het oudste nog werkende planetarium ter wereld. Afbeelding: Erik Zachte, via Wikimedia Commons (CC BY-SA 4.0).

Het raadsel van Mercurius

Zoals ik in mijn eerdere artikel beschreef, stonden Johannes Keplers wetten van de planeetbeweging aan de wieg van Isaac Newtons bewegingswetten – waarschijnlijk de belangrijkste wetenschappelijke ontdekking in de geschiedenis van de mensheid. Toen Tycho Brahe zijn extreem precieze metingen van de baan van Mars verrichtte – metingen die Kepler later zou analyseren – was er geen enkele garantie dat dit monnikenwerk iets op zou leveren. Dat het dat toch deed, kwam doordat planeetbewegingen *omkeerbaar* zijn. Juist daarom loont extreme nauwkeurigheid: al naargelang men de baan preciezer meet, wordt meer natuurkunde zichtbaar. Na Newton begreep men dit maar al te goed, en gedurende de

achttiende en negentiende eeuw werden planeetbanen dan ook steeds nauwkeuriger gemeten en hielden zij de knapste koppen van Europa bezig. Een mooi voorbeeld hiervan is het werk van de Fries Eise Eisinga, die vanaf 1774 in Franeker zijn planetarium bouwde om de verandering van planeetstanden mechanisch te berekenen.

Bij het waarnemen van planeetbanen kan onderscheid worden gemaakt tussen planeten die ten opzichte van de zon onderaards of bovenaards zijn. Mercurius en Venus zijn respectievelijk de eerste en tweede planeet vanaf de zon, en dus onderaards. Hierom staan zij vanaf de aarde – de derde planeet – gezien altijd dicht bij de zon aan de hemel, en zijn ze vooral rond zonsopkomst en zonsondergang zichtbaar, wat het nauwkeurig volgen van hun baan bemoeilijkt. Daar staat echter een voordeel tegenover: Mercurius trekt meerdere keren per eeuw precies tussen de aarde en de zon door en vormt dan een klein donker stipje op het zonneoppervlak, een zogeheten *overgang*, een soort minuscule zonsverduistering, dus. Venus kan dit eveneens doen, maar dit verschijnsel is veel zeldzamer.

Afbeelding 2. Een Mercuriusovergang. Mercurius trekt op 9 november 2006 voor de zon langs. De planeet is zichtbaar als

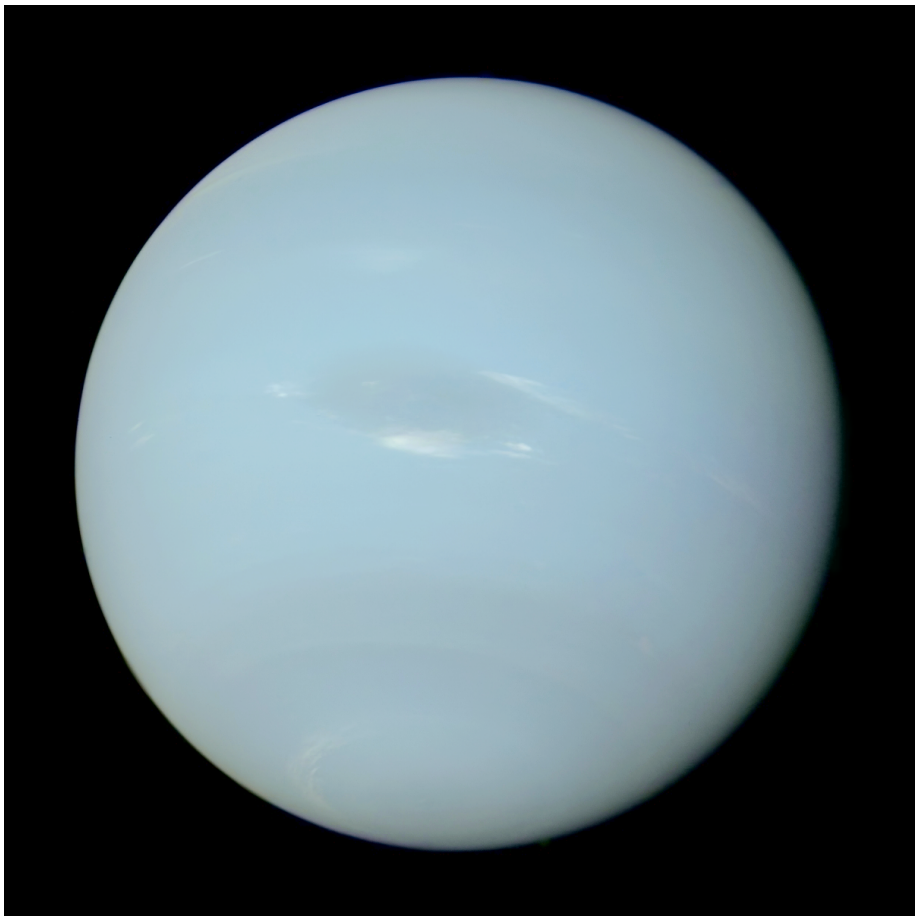
het kleine donkere stipje tegen het zonneoppervlak. Onder het stipje bevindt zich een zonnevlek. Afbeelding: edhiker, via Wikimedia Commons (CC BY 2.0).

In de voetsporen tredend van Kepler geloofde ook de Franse astronoom Urbain Le Verrier (1811–1877) dat er nieuwe lessen uit extreem nauwkeurige metingen van planeetbanen te trekken zijn. Voor Mercurius beschikte hij over waarnemingen van overgangen die meer dan anderhalve eeuw teruggingen: hij onderzocht 21 Mercuriusovergangen uit de periode 1697–1848. Daarmee kon hij de baan van Mercurius met grote nauwkeurigheid reconstrueren. Ondertussen was al bekend dat planeten niet eeuwig precies dezelfde ellips volgen zoals in Keplers eenvoudigste beschrijving. Onder invloed van de zwaartekracht van de andere planeten draait de ellips langzaam rond, zodat de baan na verloop van eeuwen een iets andere oriëntatie ten opzichte van de zon heeft (zie afbeelding 6). Deze *precessie* kan worden vastgelegd aan de hand van het perihelium: het punt in de baan waar een planeet het dichtst bij de zon staat. Le Verrier ontdekte dat de richting van het perihelium van Mercurius ten opzichte van de zon per eeuw ongeveer 565 boogseconden verschoof, oftewel slechts 0,157 graden. Omdat hij ook de banen van de andere planeten met grote nauwkeurigheid had geanalyseerd, kon hij berekenen hoeveel van die precessie volgens Newtons zwaartekrachtstheorie door hun aantrekkingskracht veroorzaakt moest worden. Hij kwam uit op 527 boogseconden per eeuw. Er bleef dus een verschil over van 38 boogseconden per eeuw: slechts 0,0106 graden.

Afbeelding 3. Urbain Le Verrier. De Franse astronoom Urbain Le Verrier (1811–1877). Door de zwaartekrachtsinvloed van de bekende planeten uiterst nauwkeurig door te rekenen, kon Le Verrier afwijkingen in hun banen onderzoeken. Zijn beroemdste succes was de voorspelling, op basis van dergelijke afwijkingen, van de positie van een tot dan toe onbekende planeet: Neptunus. Afbeelding: Smithsonian, via Store norske leksikon (publiek domein).

Op basis van dit verschil opperde Le Verrier in 1859 dat zich dicht bij de zon nog een onbekende planeet moest bevinden, die de naam Vulcanus kreeg. Vanuit het heden hierop terugkijkend lijkt het wellicht drastisch om op basis van een afwijking van een honderdste graad per eeuw een nieuwe planeet te postuleren, zeker omdat de meetapparatuur waar we tegenwoordig over beschikken veel geavanceerder is dan die toen was. Le Verrier had echter alle reden om vertrouwen te hebben in zijn methode. Dertien jaar eerder had hij uit kleine

afwijkingen in de baan van Uranus berekend waar zich een nog onbekende planeet moest bevinden. Vrijwel precies op de door hem voorspelde plaats werd in 1846 Neptunus gevonden. Ook Vulcanus leek aanvankelijk gevonden te worden. De Franse arts en amateurastronoom Edmond Modeste Lescarbault meldde dat hij in 1859 een onbekend donker object voor de zon langs had zien trekken. Le Verrier nam de waarneming serieus en raakte ervan overtuigd dat Lescarbault de ontbrekende planeet had gezien. Ditmaal liep het echter anders dan bij Neptunus: het bestaan van Vulcanus werd vervolgens door niemand bevestigd.



Afbeelding 4. Neptunus. Neptunus, gefotografeerd door de ruimtesonde Voyager 2 in 1989. De planeet werd in 1846 waargenomen nadat Urbain Le Verrier uit de afwijking van de baan van Uranus had berekend waar een nog onbekende planeet zich moest bevinden. Afbeelding: NASA/Voyager 2/PDS/OPUS/Ardenau4, via Wikimedia Commons (CC0).

Einstein vindt de ontbrekende boogseconden

In 1865 formuleerde James Clerk Maxwell zijn theorie van het dynamische elektromagnetische veld, vastgelegd in wat we tegenwoordig de maxwellvergelijkingen noemen. Deze elegante vergelijkingen waren het resultaat van eeuwen van meten, experimenteren en schaven aan wetten die elektrische en magnetische verschijnselen moesten verklaren. Maar het eindresultaat riep minstens zoveel vragen op als het beantwoordde. Zo ontdekte Hendrik Lorentz dat de maxwellvergelijkingen hun vorm behouden onder een transformatie die ruimte en tijd met elkaar vermengt: de lorentztransformatie. We zeggen dat de vergelijkingen onder zo'n transformatie *covariant* zijn. Deze transformatie kan worden gezien als het ruimtetijd-equivalent van een gewone rotatie. Bij een rotatie veranderen we de richting van de ruimtelijke assen zonder dat de vorm van de vergelijking verandert; bij een lorentztransformatie gebeurt iets vergelijkbaars, maar worden ruimte en tijd met elkaar vermengd.

Maar als er bij elektromagnetisme dus een dergelijke verweving is tussen ruimte en tijd, hoe zit het dan met zwaartekracht? Zwaartekracht zoals beschreven door Newton houdt ruimte en tijd strikt gescheiden, wat volgt uit het feit dat Newtons zwaartekracht gebaseerd is op een omgekeerde-kwadratenwet, waarbij deze kracht kwadratisch afneemt naarmate de ruimtelijke afstand tot de bron groter wordt. Tijd speelt hier geen rol. Voor elektrische krachten geldt met de wet van Coulomb een vergelijkbare omgekeerde-kwadratenwet voor krachten tussen geladen deeltjes, maar dankzij Maxwells elektrodynamica werd duidelijk dat deze wet slechts de statische, niet-covariante manifestatie is van de onderliggende covariante maxwellvergelijkingen. Dus rijst de vraag: wat zijn dan de covariante onderliggende vergelijkingen van de zwaartekracht?

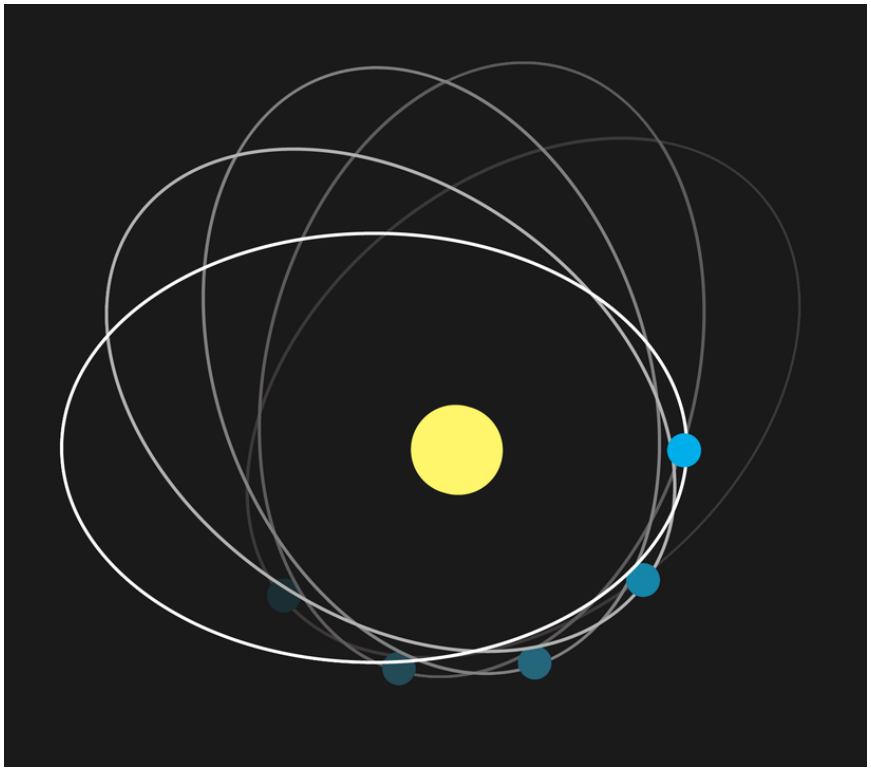
Afbeelding 5. Albert Einstein. Albert Einstein (1879-1955), die in 1915 de algemene relativiteitstheorie voltooide en daarmee de onverklaarde periheliumprecessie van Mercurius wist te verklaren. Afbeelding: Harris & Ewing Studio, 1921; colorisatie: Daniel Hass, via Wikimedia Commons (CC BY-SA 4.0).

Dit is de vraag die Einstein na de eeuwwisseling wilde beantwoorden. Om deze vraag te beantwoorden moest Einstein meetkundige technieken die in de negentiende eeuw door wiskundigen zoals Gauss, Riemann en Christoffel waren ontwikkeld voor de beschrijving van gekromde ruimten, uitbreiden naar de ruimtetijd. Na jaren van hoofdbrekens wist hij uiteindelijk een consistente theorie van de zwaartekracht te formuleren waarbij kromming van de ruimtetijd vastgelegd werd in dynamische vergelijkingen die we nu kennen als de einsteinvergelijkingen. Einstein begreep dat deze theorie niets waard zou zijn als zij geen

waarneembare voorspellingen deed waarmee zij van Newtons theorie kon worden onderscheiden. Einstein bedacht drie verschijnselen die zijn algemene relativiteitstheorie zouden kunnen bevestigen:

1. de afbuiging van licht door de zon;
2. de *roodverschuiving*, oftewel de golflengteverlenging, van licht door zwaartekracht;
3. de periheliumprecessie van de baan van Mercurius.

Het grote voordeel van de derde mogelijkheid was dat de waarnemingen al voorhanden waren en bovendien al decennialang wezen op een kleine maar hardnekkige afwijking van Newtons zwaartekrachtstheorie. Op 18 november 1915, terwijl de Eerste Wereldoorlog in volle gang was, deelde Einstein met de Pruisische Academie van Wetenschappen in Berlijn dat zijn nieuwe theorie precies de ontbrekende periheliumprecessie van Mercurius voorspelde.



Afbeelding 6. De baan van Mercurius. De baan van Mercurius is geen gesloten ellips: de richting van het perihelium, het punt waar de planeet het dichtst bij de zon staat, draait langzaam rond. Afbeelding: Mpfiz, via Store norske leksikon (publiek domein).

In een notendop deed hij dit als volgt. Einstein wist al dat zijn vergelijkingen reduceren tot Newtonse zwaartekracht wanneer de zwaartekracht zwak genoeg is. Dit was een absolute noodzakelijkheid, omdat al meer dan tweehonderd jaar duidelijk was dat Newtonse zwaartekracht in de meeste gevallen uitstekend functioneert. Neem je echter de eerste correctie mee die uit Einsteins theorie voortkomt, dan krijg je voor de radiale beweging van een lichaam, zoals Mercurius, in de aanwezigheid van een ander lichaam met massa M, zoals de zon, een vergelijking van de vorm

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 = E + \frac{GM}{r} – \frac{\rho^2}{2r^2} + \frac{\rho^2 GM}{c^2 r^3}.$$

Hier is r de afstand tussen Mercurius en de zon en G de zwaartekrachtsconstante. E en ρ zijn constanten die betrekking hebben op de energie per eenheid massa en het impulsmoment per eenheid massa. τ is de tijd gemeten door een klok die met Mercurius meebeweegt. De eerste drie termen aan de rechterkant komen ook voor in de Newtonse beschrijving die de wetten voor planeetbeweging van Kepler kon verklaren, maar waarbij er dus 38 boogseconden ontbreken voor de periheliumprecessie van Mercurius. De laatste term bevat de lichtsnelheid c en is heel klein omdat c heel groot is: dit is de algemeen relativistische correctie.

Door deze extra term als een kleine verstoring van de Newtonse baan mee te nemen, vond Einstein de boogseconden die Le Verrier ertoe aanzetten om het bestaan van een nieuwe planeet te opperen. Dit was een gigantische doorbraak die Einsteins algemene relativiteitstheorie in één klap een geloofwaardige aanvulling op Newtons theorie voor zwaartekracht maakte. Bij uitstek wekte dit resultaat de interesse van één astrofysicus die op dat moment aan het front werkzaam was als officier van het Duitse leger.

Karl Schwarzschild

Karl Schwarzschild werd geboren in Frankfurt op 9 oktober 1873. Al van jongs af aan had hij een grote liefde voor natuurkunde en wiskunde, en op 16-jarige leeftijd stuurde hij een manuscript over het bepalen van de baan van hemellichamen op basis van drie meetpunten naar *Astronomische Nachrichten*, wat leidde tot publicatie. Karl Schwarzschilds wetenschappelijke carrière ontwikkelde zich vliegensvlug, en op 28-jarige leeftijd werd hij de jongste professor in Duitsland door zijn aanstelling aan de Universiteit van Göttingen. Hier

leverde hij bijdragen aan vrijwel ieder onderwerp in de astronomie en werd hij een van de grondleggers van de moderne astrofysica. Zo hielp hij de fotometrie een stevigere kwantitatieve basis te geven door te onderzoeken hoe het zwart worden van fotografische platen afhing van de intensiteit en belichtingstijd van het invallende licht, waardoor de helderheid van sterren veel nauwkeuriger uit foto's kon worden bepaald.

Het is kenmerkend voor de veelzijdigheid van Karl Schwarzschild dat hij juist aan de Universiteit van Göttingen zijn hoogtijdagen beleefde: deze universiteit beschikte over middelmatige astronomische meetapparatuur, terwijl zij tot de wereldtop behoorde op het gebied van wiskunde en theoretische natuurkunde. Met enige tegenzin verhuisde Schwarzschild in 1909 naar de sterrenwacht in Potsdam, een plek die beschikte over de beste astronomische meetapparatuur van Duitsland, maar die hem enigszins isoleerde van de theoretische natuurkunde. Vanuit Potsdam raakte Schwarzschild geïnteresseerd in Einsteins nieuwe zwaartekrachtstheorie en in 1913 probeerde hij tevergeefs de door Einstein voorspelde roodverschuiving te bevestigen door het spectrum van zonlicht nauwkeurig te bestuderen.

In 1914 brak de Eerste Wereldoorlog uit. Omdat Schwarzschild op dat moment 40 jaar oud was, zou hij in ieder geval aanvankelijk niet worden opgeroepen. Karl Schwarzschild was joods, wat soms voor complicaties zorgde. Zo waren de ouders van zijn uiteindelijke vrouw lange tijd fel tegenstander van hun huwelijk. Deels vanwege zijn joodse identiteit voelde hij de plicht om zich vrijwillig aan te melden. Als officier verrichtte hij zowel aan het oostfront als aan het westfront werkzaamheden op het gebied van ballistiek en schreef hij een artikel over het effect van wind en luchtdichtheid op de baan van granaten, dat vanwege de militaire implicaties pas na de oorlog werd gepubliceerd.

In december 1915, nadat Einstein zijn berekening van de periheliumprecessie van Mercurius had gepresenteerd, bevond Schwarzschild zich in de Vogezen aan het westfront. Met het geluid van artillerievuur op de nabijgelegen Hartmannsweilerkopf op de achtergrond ontdekte hij hier de eerste exacte oplossing van de einsteinvergelijkingen.

Afbeelding 7. Karl Schwarzschild (1873-1916). Afbeelding: onbekende fotograaf, via Wikimedia Commons (publiek domein).

De oplossing van Schwarzschild

Dat Einstein zelf nog niet in staat was geweest een exacte oplossing van zijn vergelijkingen te vinden, kwam doordat de einsteinvergelijkingen, in tegenstelling tot de maxwellvergelijkingen, niet-lineair zijn – er komen termen in voor waarin het zwaartekrachtsveld met zichzelf vermenigvuldigd moet worden – en daardoor veel moeilijker op te lossen. Voor zijn berekening van de baan van Mercurius werkte Einstein daarom met een benaderende oplossing, waarbij hij de afwijkingen ten opzichte van Newtons

zwaartekracht als kleine verstoringen behandelde. Door gebruik te maken van de bolsymmetrie van de zon, slaagde Schwarzschild er echter in de einsteinvergelijkingen exact op te lossen.

Zoals een oplossing van de maxwellvergelijkingen gegeven kan worden in termen van een elektromagnetisch veld, zo wordt een oplossing van de einsteinvergelijkingen gegeven in termen van de *metriek*. Een metriek is een middel om afstanden te berekenen in de ruimte of ruimtetijd. Voor een ruimte zonder kromming kan de stelling van Pythagoras worden gebruikt om afstanden te meten. Een dergelijke ruimte wordt *euclidisch* genoemd, naar de Alexandrijnse wiskundige Euclides, wiens boek *Elementen* de basis vormde voor de meetkunde zoals die vervolgens tweeduizend jaar lang werd bedreven.

De speciale relativiteitstheorie, ontwikkeld door Einstein, Minkowski, Poincaré en Lorentz, breidt het begrip afstand uit naar de ruimtetijd. Een infinitesimale afstand, net als bij Pythagoras in het kwadraat berekend en aangegeven met de notatie ds^2, wordt daarin uitgerekend aan de hand van de Minkowskimetriek[1] $\eta_{\mu \nu }$:

$$ds^2 = \eta_{\mu \nu } dx^\mu dx^\nu = -c^2 dt^2 + d\boldsymbol{x}^2.$$

Het symbool c staat hier weer voor de lichtsnelheid, en dt^2 en $d \boldsymbol{x}^2$ geven (kwadraten van) afstandscomponenten in de tijd respectievelijk ruimte aan. Van belang is dat we het in de ruimtetijd niet meer hebben over de afstand tussen twee *punten* (die elk een plaats hebben), maar tussen twee *gebeurtenissen* (die elk een plaats en een tijdstip hebben).

De algemene relativiteitstheorie van Einstein beschrijft situaties waarin deze metriek voor de ruimtetijd *kromming* beschrijft. Zwaartekracht is volgens Einstein niets anders dan het volgen van de natuurlijke baan van een lichaam door deze gekromde ruimtetijd. Door de einsteinvergelijkingen buiten een bolvormig, massief lichaam exact op te lossen, construeerde Schwarzschild de volgende metriek $g_{\mu \nu }$:

$$ds^2 = g_{\mu \nu } dx^\mu dx^\nu = -\left(1-\frac{2GM}{c^2r}\right)c^2dt^2 +\left(1-\frac{2GM}{c^2r}\right)^{-1}dr^2 +r^2d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta \, d \phi^2.$$

Naast de zwaartekrachtsconstante en de lichtsnelheid zien we in deze uitdrukking de massa M van het lichaam en afstandscomponenten gebaseerd op de bolsymmetrische coördinaten t, r, θ en ϕ. Met deze oplossing vond Schwarzschild dezelfde ontbrekende boogseconden die Einstein vond, wat geen verrassing was aangezien de berekening van de periheliumprecessie ook met behulp van Schwarzschilds oplossing uiteindelijk alsnog vereist dat het effect van de algemene relativiteit op de baan van Mercurius als kleine verstoring en niet exact wordt meegenomen. Op 22 december 1915 stuurde Schwarzschild zijn resultaat naar Einstein. Hierin schrijft hij: “Zoals u ziet is de oorlog mij gunstig gezind, doordat hij mij toestaat om, ondanks hevig kanonvuur op zeer aardse afstand, deze wandeling door uw ideeënwereld te maken.” Einstein reageerde een week later enthousiast. Hij schreef: “Ik had niet gedacht dat de exacte behandeling van het probleem van een puntmassa zo eenvoudig zou zijn.”

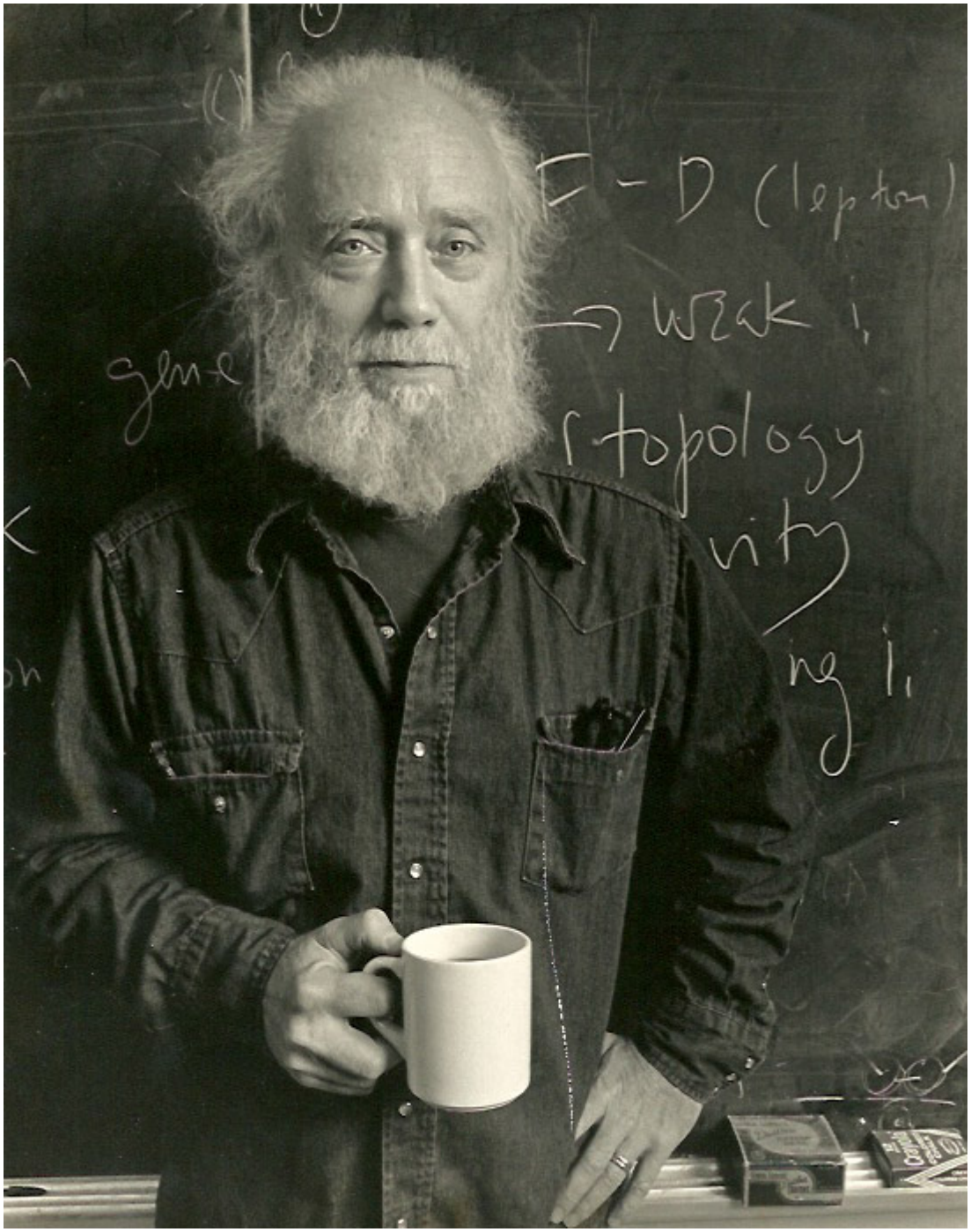
Afbeelding 8. Verwoeste loopgraven op de Hartmannswillerkopf in de Vogezen, september 1915. Met het geluid van explosies vanuit deze berg op de achtergrond vond Schwarzschild drie maanden later zijn exacte oplossing van de einsteinvergelijkingen. Foto: Agence Rol / Bibliothèque nationale de France, via Wikimedia Commons (publiek domein).

Zwarte gaten

De oplossing van Schwarzschild heeft een bijzondere eigenschap. Als je de straal r

gelijkstelt aan $\frac{2GM}{c^2}$, een waarde die bekendstaat als de schwarzschildstraal, dan gaat de term die dt^2 vermenigvuldigt naar nul en de term die dr^2 vermenigvuldigt naar oneindig. Op het eerste gezicht lijkt er bij deze straal dus iets mis te gaan met de ruimtetijd. In de decennia die op Schwarzschilds ontdekking volgden werd echter duidelijk dat deze oneindigheid het gevolg is van de keuze van het coördinatenstelsel: kies je andere coördinaten, dan verdwijnt het probleem en blijken lichamen de schwarzschildstraal gewoon te kunnen passeren.

Pas in 1958 begreep de Amerikaanse natuurkundige David Finkelstein wat de schwarzschildstraal werkelijk betekent. Hij liet zien dat een lichaam, zodra het de schwarzschildstraal van een ander massief object heeft gepasseerd, geen baan meer kan volgen waarmee het weer naar buiten ontsnapt. De schwarzschildstraal vormt dus een *gebeurtenishorizon*: een grens waarachter niets, zelfs licht niet, meer invloed kan uitoefenen op de buitenwereld.

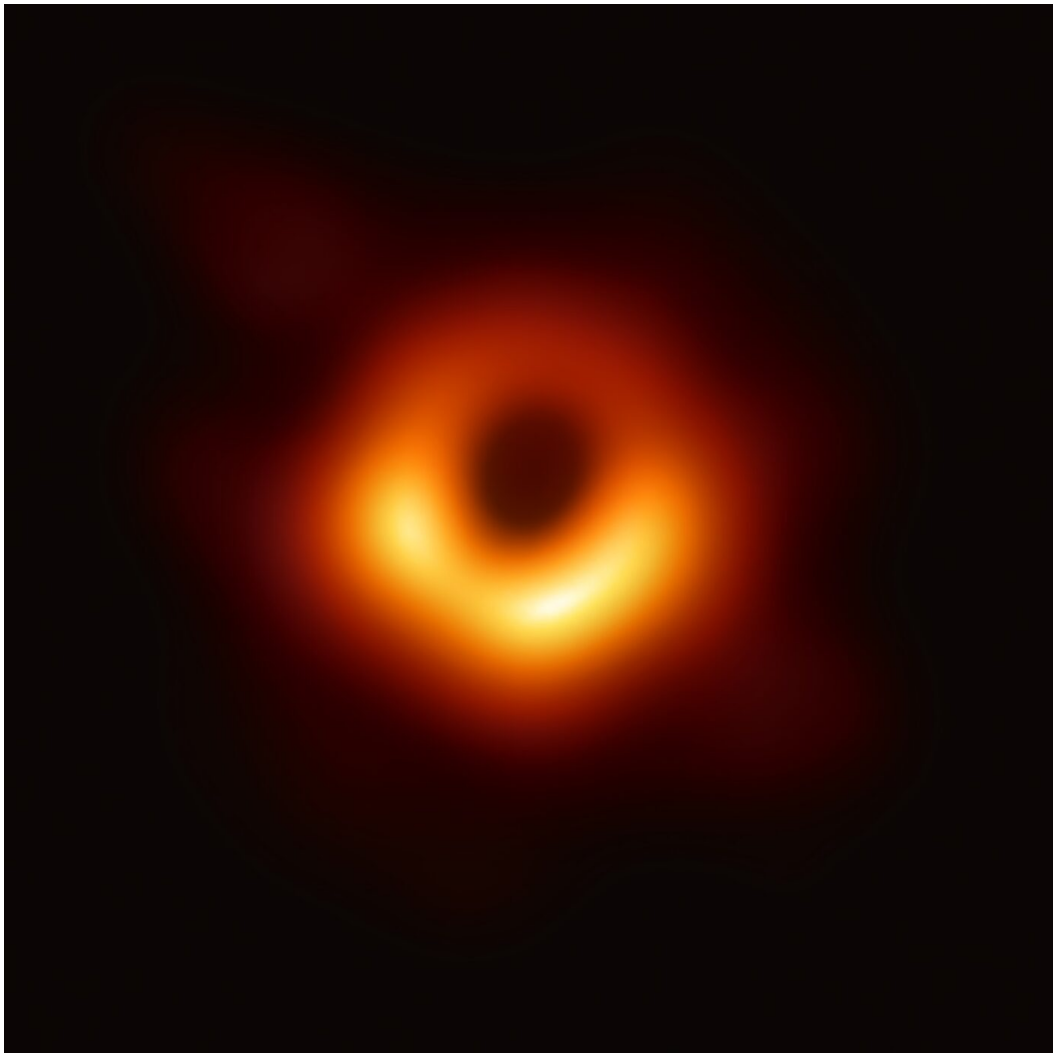


Afbeelding 9. David Finkelstein. De Amerikaanse natuurkundige David Finkelstein (1929–2016), die in 1958 bewees dat licht de schwarzschildstraal niet in uitwaartse richting kan passeren. Afbeelding: Alan David, 1984, via Wikimedia Commons (CC0).

In de jaren 60 bedacht men de naam *zwart gat* voor zulke objecten. Als zelfs licht niet meer kan ontsnappen, kan het zwarte gat zelf immers geen licht uitzenden. De materie die naar een zwart gat toe valt maar de gebeurtenishorizon nog niet in inwaartse richting heeft gepasseerd, kan daarentegen juist zeer fel stralen. Een van de eerste indirecte aanwijzingen

voor het bestaan van een zwart gat kwam van Cygnus X-1, een bron van röntgenstraling die ongeveer 7000 lichtjaar van de aarde verwijderd is. Vanaf begin jaren zeventig werd steeds duidelijker dat hier een zwart gat met een stellaire massa materie aantrekt van een begeleidende ster.

In de eenentwintigste eeuw werden zwarte gaten nog directer waargenomen. Het *Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory* meet sinds 2015 zwaartekrachtsgolven afkomstig van botsende zwarte gaten en ook van botsingen tussen een zwart gat en een neutronenster. Daarnaast slaagde de *Event Horizon Telescope Collaboration* er in 2019 in om met een netwerk van radiotelescopen verspreid over de hele wereld een foto te maken van de straling van materie die opgeslokt wordt door het superzware zwarte gat M87*, op ongeveer 55 miljoen lichtjaar afstand van de aarde.



Afbeelding 10. Een zwart gat. Het superzware zwarte gat M87*, afgebeeld door de Event Horizon Telescope Collaboration. Afbeelding:

Event Horizon Telescope Collaboration, via ESO/Wikimedia Commons.

Terug naar Göttingen

Helaas heeft Schwarzschild nooit geweten welke betekenis zijn exacte oplossing van de einsteinvergelijkingen uiteindelijk zou krijgen. Kort na zijn correspondentie met Einstein, die ervoor zorgde dat zijn werk werd gepubliceerd terwijl Schwarzschild zijn militaire dienst voortzette, kreeg Schwarzschild ernstige last van de huidziekte pemphigus, een auto-immuunziekte waar hij al van jongs af aan aan leed. Op 11 mei 1916 overleed hij hieraan. Veel is onduidelijk over het precieze verloop van zijn ziekte en over zijn laatste maanden in militaire dienst. Ook is veel beschikbare informatie over deze militaire dienst onjuist; zo staat op veel plekken geschreven dat Schwarzschild zich aan het oostfront bevond toen hij zijn oplossing construeerde. In een brief aan quantumpionier Arnold Sommerfeld die hij eveneens op 22 december 1915 schreef, benoemt Schwarzschild echter het artillerievuur vanaf de berg Hartmannsweilerkopf in de Vogezen. In de zomer van 1915 verbleef Schwarzschild wel aan het oostfront, in Litouwen. Een andere vraag met betrekking tot zijn verblijfplaats gedurende het jaar 1915 is of Schwarzschild met verlof was toen Einstein op 18 november zijn werk over Mercurius presenteerde aan de Pruisische Academie voor de Wetenschappen. Aangezien Schwarzschild destijds in Potsdam woonde, zou hij tijdens zijn verlof Einsteins presentatie in Berlijn bijgewoond kunnen hebben. Of dat is gebeurd, heb ik niet met zekerheid kunnen vaststellen. Schwarzschild werd begraven op het Stadtfriedhof in Göttingen in een graf waar in 1950 ook zijn vrouw begraven werd, evenals zijn zoon Alfred, die in 1944 in nationaalsocialistisch Duitsland zelfmoord pleegde. Schwarzschilds andere zoon Martin en dochter Agathe wisten Duitsland te ontvluchten voor het uitbreken van de Tweede Wereldoorlog.

Dat Karl Schwarzschilds bijzondere levensverhaal niet bekender is en uitgebreider bedocumenteerd, is opvallend. Na de Eerste Wereldoorlog probeerden zijn zwager Robert Emden en Arnold Sommerfeld zijn verzamelde werk uit te geven, maar de opkomst van het nationaalsocialisme maakte een dergelijke uitgave van het werk van een joodse wetenschapper uiteindelijk onmogelijk. Daarmee verdween een verhaal naar de achtergrond dat slecht paste bij het antisemitische wereldbeeld van het nieuwe regime: dat van een joodse Duitse wetenschapper die in tegenstelling tot de meeste van zijn collega’s vrijwillig zijn land diende en aan het front de basis legde voor een onderzoeksrichting die een eeuw

later nog steeds van grote relevantie is.

Afbeelding 11. Het graf van Schwarzschild. Het familiegraf van Karl Schwarzschild in Göttingen, waar ook zijn vrouw Else en zoon Alfred begraven zijn. Foto: Ruben Lier.

Bronvermelding:

Voor Le Verriers onderzoek naar planeetbanen en in het bijzonder zijn gebruik van historische waarnemingen van Mercuriusovergangen heb ik gebruikgemaakt van Jacques Laskars *Des premiers travaux de Le Verrier à la découverte de Neptune* (2017).

Voor Schwarzschilds leven, wetenschappelijke werk en correspondentie met Einstein heb ik voornamelijk gebruikgemaakt van Hans-Heinrich Voigts *Biography of Karl Schwarzschild (1873-1916)*, opgenomen in *Karl Schwarzschild: Gesammelte Werke / Collected Works* (1992).

Daarnaast heb ik gebruikgemaakt van Gudrun Wolfschmidts *Karl Schwarzschild – Pionier der Astrophysik* (2016) en van Jonas Enanders *Göttingens svarta hål*, waarin hij aan de hand van archiefmateriaal onder meer Schwarzschilds militaire dienst en verblijfplaats in 1915 bespreekt. Enander is tevens de auteur van het boek *Facing Infinity: Black Holes and Our Place on Earth*. Met hem heb ik daarnaast per e-mail gecorrespondeerd.

Voor de brief van Schwarzschild aan Arnold Sommerfeld van 22 december 1915 heb ik gebruikgemaakt van Michael Eckerts biografie *Arnold Sommerfeld: Science, Life and Turbulent Times 1868–1951* (2013).

---

[1] De kleine lettertjes: in deze vergelijking gebruiken we een conventie die naar Einstein vernoemd is, waar het voorkomen van een boven- en een onderindex μ betekent dat die index over de waarden 0 t/m 3 gesommeerd wordt. De middelste uitdrukking omvat dus maar liefst zestien termen, waarvan de meeste in dit geval gelijk aan nul blijken te zijn – vandaar de nog betrekkelijk eenvoudige uitdrukking aan de rechterkant.