Spelen met stippels

Opeengestapelde tweedimensionale vlakken met stippen, die samen duizelingwekkende patronen vormen. Het klinkt misschien als een vreemd onderwerp om te bestuderen, maar er schuilt interessante wiskunde en natuurkunde achter!

In de video hieronder legt wiskundig fysicus Tadashi Tokieda uit hoe je, met een papiertje met zwarte stippen en een fotokopie daarvan op een transparant vel, verbazingwekkende patronen kunt creëren. Voordat ik dat nog wat verder toelicht, kun je het beste eerst zelf de video bekijken:

Video 1. Hoe stippels je kunnen verrassen.Video van Numberphile, ondersteund door het Amerikaanse Mathematical Sciences Research Institute.

Wat Tokieda laat zien, gaat als volgt. Als je begint met willekeurig geplaatste zwarte stippen, en het transparante vel een beetje draait ten opzichte van het onderliggende papier, dan ontstaan er ‘uit het niets’ cirkels. Dit heeft alles te maken met de zogeheten *correlatie* tussen de stippen in de twee lagen, oftewel: hoe dicht de stippen in de bovenste laag bij de stippen op de onderste laag eindigen. Dicht bij het centrum van rotatie liggen de stippen bijna precies bovenop elkaar. Iets verder naar buiten, komen de stippen juist recht naast elkaar te liggen, wat onze ogen meteen herkennen als ronde cirkels. Als een van de twee stippenpatronen net iets kleiner of groter is dan het andere, komen de gedraaide stippen niet recht naast de onderliggende stippen te liggen, maar juist schuin ernaast – zo ontstaat er een spiraal.

Het wordt interessanter wanneer we niet naar willekeurig geplaatste stippen kijken, maar naar een periodiek patroon. Tokieda laat twee voorbeelden zien, met een vierkant en een driehoekig rooster. Als je hierbij het transparante vel een beetje draait, ontstaat er uit het niets een vierkant of driehoekig patroon dat veel groter is dan de onderliggende roosters zelf. Dergelijke patronen heten *Moiréroosters*. De draaihoek tussen de twee stippellagen bepaalt de roosterafstand, en de (rotatie)symmetrie van de oorspronkelijke stippelpatronen bepaalt

de vorm van het Moiérooster.

Dergelijke patronen zijn niet alleen magisch om te zien, ze zouden ook nog eens nuttig kunnen zijn. Tweedimensionale roosters komen namelijk ook voor in de natuur, in tweedimensionale materialen waarin de atomen gerangschikt zijn in een kristalstructuur. Een voorbeeld van zo'n materiaal is het beroemde *grafeen*. Door twee tweedimensionale kristallen boven op elkaar te leggen, en de één een beetje te draaien ten opzichte van de ander, ontstaat er net als in de video hierboven een Moiréerooster. Dit kan een sterke invloed hebben op het gedrag van de elektronen in de dubbellaag. Elektronen worden door het Moiérooster namelijk een beetje vastgehouden op hun plek, waardoor ze makkelijker met elkaar kunnen wisselwerken. Dit leidt tot speciale effecten zoals supergeleiding, en we kunnen het effect mogelijk gebruiken voor een hele nieuwe generatie elektronica. Benieuwd? Lees dan ook ons eerdere artikel over *twistronica*!