Spiegelsymmetrie

In de moderne theoretische natuurkunde spelen dualiteiten een hoofdrol. Zo zijn er onder andere de elektromagnetische dualiteit, de bekende T-dualiteit in snaartheorie en de inmiddels befaamde AdS/CFT correspondentie. Vandaag bespreken we een andere beroemde dualiteit die geboren is in de snaartheorie, maar inmiddels is uitgegroeid tot een volwassen onderzoeksgebied binnen de wiskunde. Deze dualiteit heet in het engels *mirror symmetry,* oftewel 'Spiegelsymmetrie'.

Afbeelding 1. Spiegelsymmetrie. Veel van wat we in onze natuur zien komt ook in spiegelbeeld voor. Ook in de snaartheorie bestaat een 'spiegelsymmetrie', al lijken de spiegelbeelden daar op het eerste gezicht helemaal niet op elkaar!

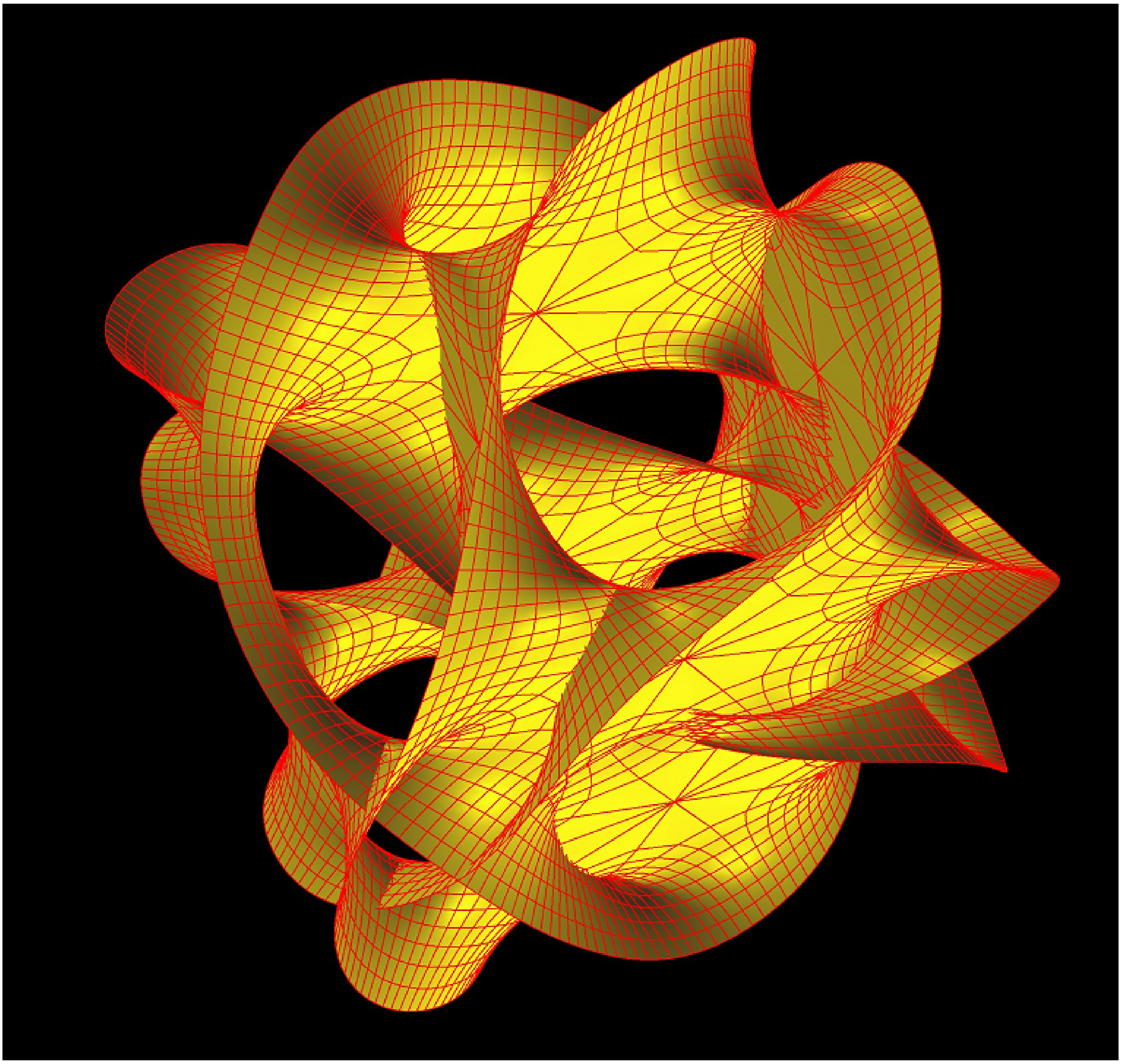
In een eerder artikel uit de serie *snaren en holografie* werd het feit genoemd dat de snaartheorie alleen wiskundig consistent is wanneer die theorie een tiendimensionale ruimtetijd beschrijft. Hierbij hebben we dus te maken met 9 ruimtedimensies en 1 tijdsdimensie. Nu kunnen we alleen drie ruimtedimensies en één tijdsdimensie waarnemen, en lijken we dus in eerste instantie met een probleem te zitten. In het zojuist genoemde artikel leerden we echter dat er een elegante oplossing voor dit probleem bestaat: *compactificatie* – zes van de negen ruimtedimensies kunnen we 'oprollen'.

De verschillende manieren waarop je deze dimensies kunt oprollen leiden tot een ontzettend rijk spectrum aan mogelijke theorieën, elk met andere eigenschappen. Deze diversiteit aan eigenschappen wordt bepaald door de meetkundige kenmerken van de 6 dimensies die je opvouwt. Tijdens het oprollen willen we echter dat bepaalde symmetrieën van onze snaartheorie behouden blijven, en dat leidt tot een extra voorwaarde op de mogelijke compactificaties. Het gevolg van deze 'eis' is dat de vorm van de zes opgevouwen dimensies iets is wat wiskundigen een *Calabi-Yau-variëteit*[1] noemen. Deze klasse van variëteiten werd al langer door wiskundigen bestudeerd, maar toen men ze terugvond in de snaartheorie trokken ze daarnaast ook de aandacht van natuurkundigen.

Twee variëteiten, één quantumtheorie

De ontdekking van spiegelsymmetrie begon in 1986 toen de natuurkundige Doron Gepner, toen een postdoctoraal onderzoeker aan de universiteit van Princeton, bepaalde *quantumveldentheorieën* ('QFT's') bestudeerde waarvan de beschrijving verbazingwekkend veel kenmerken deelde met Calabi-Yau-variëteiten. Gepner realiseerde zich dat de natuurkundige eigenschappen die deze veldentheorieën kende – zoals de symmetrieën en de verschillende typen deeltjes in de theorie – precies overeenkwamen met die van een snaar die zich verplaatst door een Calabi-Yau-variëteit. Het werk van Gepner legde zo een directe link tussen één specifieke Calabi-Yau-variëteit en een specifieke quantumveldentheorie.

Nadat deze link was gelegd, volgden de eerste hints naar het daadwerkelijke bestaan van spiegelsymmetrie. In 1987 gebruikten Lance Dixon en (wederom) Doron Gepner de eerder vastgestelde link om verschillende Calabi-Yau-variëteiten te relateren aan QFT's, en ze ontdekten dat in sommige gevallen twee verschillende Calabi-Yau-variëteiten gerelateerd konden worden aan één en dezelfde QFT. Dit leidde tot de vraag of er dan misschien een diepere relatie tussen deze twee ogenschijnlijk verschillende variëteiten bestond.



Afbeelding 2. Een Calabi-Yau-variëteit. Een driedimensionale doorsnede van een (in werkelijkheid zesdimensionale) Calabi-Yau-variëteit.

In 1989 werden daadwerkelijk de eerste vermoedens rondom deze diepe relatie op papier gezet door Wolfgang Lerche, Cumrun Vafa en Nicholas Warner. Deze drie natuurkundigen stelden dat twee verschillende Calabi-Yaus inderdaad zouden kunnen leiden tot één en dezelfde QFT en dus tot hetzelfde fysische model. Hun stelling was nog sterker dan het vermoeden van Dixon en Gepner: deze laatste twee bestudeerden namelijk variëteiten met dezelfde *topologie*[2]. Nu waren de Calabi-Yaus van Lerche, Vafa en Warner echter ook topologisch compleet anders, en dat maakte deze diepe relatie des te interessanter.

Spiegelsymmetrie kunnen we dus formuleren als volgt: voor iedere Calabi-Yau-variëteit die je kunt construeren, bestaat er een tweede Calabi-Yau – die er mogelijk compleet anders uitziet – die leidt tot exact hetzelfde fysische model, wanneer we een snaartheorie beschrijven op deze variëteit. De relatie tussen de Calabi-Yau en zijn partner – ook wel zijn ‘spiegelbeeld’ genoemd, hoewel de twee er ook in de spiegel héél anders uit kunnen zien – lijkt vrij diep te zijn. In feite kan men allerlei eigenschappen van een variëteit onderzoeken door zijn spiegelbeeld te bestuderen. Dat laatste blijkt mooi uit het volgende verhaal.

Een discrepantie tussen wis- en natuurkundigen

In mei 1991 werd bij het *Mathematical Sciences Research Institute* in Berkeley een conferentie gehouden voor zowel wiskundigen als natuurkundigen, waar onder andere spiegelsymmetrie op het programma stond. De Britse fysicus Philip Candelas deelde in een discussie met collega’s de nieuwste resultaten van zijn recent verschenen paper met Xenia de la Ossa, Paul Green en Linda Parkes, waarin zij onder andere lieten zien hoe spiegelsymmetrie gebruikt kon worden om bepaalde problemen in *enumeratieve meetkunde* op te lossen. Om preciezer te zijn: van een specifieke Calabi-Yau-variëteit genaamd de *quintic threefold* berekenden zij hoeveel *derdegraads krommen*[3] je kan tekenen in deze ruimte. Dit aantal bleek 317.206.375 te zijn, ruim 300 miljoen, dus. Dit resultaat kwam echter niet overeen met de berekening van de Noorse wiskundigen Geir Ellingsrud en Stein Arild Strømme, die gebruik maakten van veel rigoureuzere technieken en daarmee uitkwamen op 2.682.549.425, meer dan twee miljard. De consensus onder de wiskundigen op de conferentie was dat Candelas en zijn collega’s een fout moesten hebben gemaakt. Dit probleem hoorde toch echt thuis in de wiskunde, en dat een groep natuurkundigen met hun onbewezen technieken in staat zouden zijn tot een beter antwoord te komen leek hen onwaarschijnlijk. Na een herziening van hun methode ontdekten Ellingsrud en Arild Strømme een maand later echter dat ze toch een fout hadden gemaakt – en na de berekening opnieuw uitgevoerd te hebben kwamen ze precies op het resultaat van Candales et al.!

Dit was een belangrijk moment voor reputatie van spiegelsymmetrie. De rectificatie van de Noorse wiskundigen toonde aan dat de snaartheoretici gelijk hadden en bracht spiegelsymmetrie direct in de belangstelling van de wiskundegemeenschap. Tot op de dag van vandaag wordt deze bijzondere dualiteit hevig bestudeerd door wiskundigen. De kracht zit hem in het feit dat bepaalde vragen die voor één specifieke Calabi-Yau-variëteit heel moeilijk te beantwoorden zijn, misschien heel makkelijk kunnen worden beantwoord als je diezelfde vraag formuleert voor zijn spiegelbeeld. Daarnaast zijn wiskundigen zeer geïnteresseerd in het begrijpen van de oorsprong van de dualiteit en het bewijzen daarvan. Dit laatste is al gelukt voor een reeks simpelere voorbeelden, maar een sluitend bewijs voor algemene Calabi-Yau-variëteiten is nog niet geformuleerd.

Hodgediamant

Een mooi voorbeeld waarin we spiegelsymmetry kunnen zien is als we de zogenoemde *Hodgediamant* van Calabi-Yau-variëteiten bestuderen. Zonder al te veel in de wiskundige details te treden, kan men stellen dat de Hodgediamant een diagram is dat bepaalde topologische eigenschappen van de desbetreffende variëteit beschrijft. Voor een zesdimensionale variëteit bestaat de Hodgediamant uit 16 getallen die in een rooster in de vorm van een ruit (of in het engels *diamond*) worden gerangschikt. Twee voorbeelden, waarin de (gehele) getallen *a* en *b* nog niet zijn ingevuld, zijn gegeven in afbeelding 3. Als je deze ruiten bestudeert, zullen twee dingen je opvallen. Allereerst bestaan de randen uit nullen en enen, met alleen een één op de hoekpunten. Dit blijkt het geval te zijn voor alle Calabi-Yau-variëteiten, ook in een hoger (of lager) aantal dimensies. Ten tweede zie je dat de diamanten heel symmetrisch zijn: als je ze 180 graden draait rond hun middelpunt, vind je weer dezelfde diamant. Dat leidt ertoe dat in het geval van zes dimensies slechts twee getallen, in de afbeeldingen *a* en *b,* daadwerkelijk vrij te bepalen parameters van de Calabi-Yau zijn. Stel je nu voor dat we een Calabi-Yau nemen en de Hodgediamant uittekenen. Vervolgens nemen we zijn ‘spiegelbeeld’ en tekenen we wederom de Hodgeruit. Dan vinden we dat die tweede ruit vrijwel gelijk is aan de originele ruit, alleen dan *gespiegeld* langs de diagonaal! Een andere manier om hiernaar te kijken is door simpelweg te stellen dat de variabelen *a* en *b* in afbeelding 3 worden verwisseld als we de spiegel-Calabi-Yau bekijken. Deze ‘spiegeling’ langs de diagonaal is de historische reden voor de naam spiegelsymmetrie.

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 0 & & 0 & & \\
 & 0 & & a & & 0 & \\
1 & & b & & b & & 1 \\
 & 0 & & a & & 0 & \\
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & & 1 & & &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 0 & & 0 & & \\
 & 0 & & b & & 0 & \\
1 & & a & & a & & 1 \\
 & 0 & & b & & 0 & \\
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & & 1 & & &
\end{array}
$$

Afbeelding 3. Hodgediamanten. Links de Hodgediamant van een willekeurige zesdimensionale Calabi-Yau-variëteit en rechts de diamant van zijn ‘spiegelbeeld’.

Spiegel-Calabi-Yaus zijn dus op heel verrassende wijzen ook wiskundig aan elkaar gerelateerd, hoewel ze er zoals gezegd op het eerste gezicht totaal verschillend uit kunnen zien. Zo leidde werk van natuurkundigen tot verrassende nieuwe wiskundige inzichten. Deze ontwikkeling van spiegelsymmetrie past in een bredere trend die men de afgelopen decennia heeft waargenomen, waarin wis- en natuurkunde dichter naar elkaar toe groeien. Vandaag de dag zijn er talloze conferenties waar experts van beide achtergronden samenkomen om zowel fundamentele wis- als natuurkunde beter te begrijpen, met als lichtend voorbeeld de String Math-conferentie die sinds 2011 jaarlijks wordt gehouden. Deze interactie tussen beide disciplines heeft aangetoond zeer rijk en inventief te zijn, en zal dan ook zeker in de toekomst leiden tot nog meer boeiende wis- en natuurkunde.

Dit verhaal is deels gebaseerd op het boek ‘The Shape of Inner Space’ van Shing-Tung Yau en Steve Nadis.

[1] ‘Variëteit’ is een formeel woord dat de lezer mag interpreteren als ‘ruimte’ of ‘vorm’. Wiskundig gezien is een variëteit echter een iets algemener begrip, en daarom gebruiken we het ook hier.

[2] Variëteiten (of ruimtes) met dezelfde topologie kun je in elkaar vervormen zonder te knippen of een gat in de ruimte te boren. Het bekende voorbeeld dat de doorgewinterde QU-lezer inmiddels wel *ad nauseam* kent is dat van de donut en de koffiemok, die allebei één gat hebben en dus topologisch equivalent zijn.

[3] Dit zijn krommen die worden gedefinieerd aan de hand van een derdegraads polynoom. Een voorbeeld zijn de oplossingen van de vergelijking is $4x^2 -5y^3=0$ in twee dimensies met coördinaten (x, y).