

Van guillotines tot piramides (2)

De Franse wis- en natuurkundige Joseph Fourier (1768-1830) leverde vele bijdragen aan de wetenschap die we ook vandaag nog overal in de natuurkunde tegenkomen. In dit tweeluik, een bewerkte versie van het artikel 'De omzwervingen van Fourier' in het *Nieuw Archief voor Wiskunde*, beschrijft Edward Berengoltz het bewogen leven en de wetenschap van Fourier. Een uitgebreidere versie verschijnt binnenkort ook als hoofdstuk van een boek dat Edward schrijft.



Detail van Jacques-Louis Davids *Le Sacre de Napoléon in het Louvre*. Keizer Napoleon I kroont zijn keizerin. Rechtsboven naast de kandelaren piept de tulband van de Ottomaanse ambassadeur in beeld. Via [Wikimedia Commons](#).

In het [eerste deel van dit artikel](#) hebben we kennisgemaakt met Jean-Baptiste Fourier, die na een onstuimige jeugd en roerige jaren tijdens de Franse Revolutie in dienst van Napoleon

was beland. Fourier had zich ontpopt als buitengewoon kundig onderzoeker die uitmuntte in grondigheid en vastberadenheid.

Tijdens het Franse avontuur naar Egypte van 1798 had hij vele expedities geleid, totdat Napoleon plotseling terugkeerde naar Frankrijk en via een staatsgreep de Eerste Consul van het land werd. Wat moest Fourier nu?

Retour naar Frankrijk

Eensklaps droeg Fourier, nu zowel Bonaparte als Monge weg waren, de hoogste civiele autoriteit. Hij voerde vredesbesprekingen met de Cairoten in een gevaarlijk stadsdeel; een verdwaalde kogel verbrijzelde eens de koffiekannet die hij in zijn hand hield. Pas twee jaar later, tegen het einde van 1801, keerden Fourier en de overblijfselen van de expeditie terug naar Frankrijk — weliswaar met bootladingen aan kennis maar zonder ook maar een basis in Egypte te hebben overgehouden. Bij de terugtocht werd hun boot tot overmaat van ramp door de Britten aangehouden, maar met enige moeite lukte het Fourier ze te overtuigen om de Fransen te laten gaan. Wel moesten de Fransen de Steen van Rosetta overhandigen, die nog steeds trots in het British Museum getoond wordt.

Fourier wilde vooral zijn baan aan de École Polytechnique voortzetten, maar de Eerste Consul had spoedig andere plannen. Fourier werd in januari 1802 aangesteld als prefect van het *département* Isère, bij de Alpen. Ook daar paste hij zijn diplomatieke en retorische vaardigheden toe om mensen en werken in goede banen te leiden en geschillen te beslechten. Hij kweet zich met verve van deze nieuwe taken. Zijn belangrijkste projecten waren de drooglegging van het grote moeras van Bourgoin voor akkerland en de aanleg van een grote weg tussen Grenoble en Turijn, dat toentertijd bij Frankrijk hoorde. Hij ging intussen door met het voorbereiden van publicaties namens het Institut d'Égypte. Ook Bonaparte deed goede zaken. Fourier was in 1804 aanwezig bij diens kroning tot Keizer Napoleon. In 1808 benoemde de keizer hem vervolgens tot *Baron de l'Empire*.

Los van zijn prefectuur leverde Fourier wanneer hij er maar tijd voor had noeste arbeid omtrent zijn warmteoverdrachtstheorie. Terwijl Keizer Napoleon in 1807 na een denderende overwinning op de Pruisen zijn Corsicaanse tongval mat met het hoffelijke Frans van zijn Russische evenknie, legde Fourier de laatste hand aan zijn artikel. In december kwam deze *Mémoire sur la propagation de la chaleur dans les corps solides* (Beschrijving van de

warmteoverdracht in vaste lichamen) voor een viermanscomité bestaande uit Laplace, Lagrange, Lacroix en Monge in Parijs, waar de tekst met scheve ogen werd gelezen.

Fourier bestudeerde verschillende aspecten van de warmteleer zoals straling, afkoeling en opwarming; alles geïnspireerd door processen uit de echte wereld. Hij gebruikte de techniek van zogeheten goniometrische reeksen – gebaseerd op periodieke functies zoals de sinus en cosinus – om de [warmtevergelijking*](#) op te lossen. Deze techniek was niet geheel nieuw, maar gebaseerd op soortgelijk werk van de legendarische wiskundige Leonhard Euler. Fourier heeft haar echter op gewaagde en briljante wijze veralgemeend en breder toegepast. Deze fourieranalyse *avant la lettre* was zo boud dat zelfs Laplace en Lagrange – alleszins vriendelijk jegens Fourier – zich niet lieten overtuigen.

Op de afleiding van de warmtevergelijking zelf kwam ook kritiek, en wel van Jean-Baptiste Biot – bekend van de [magnetismewet van Biot en Savart](#) – en Siméon Denis Poisson, wiens naam veelvuldig [voorkomt in de meetkunde en kansrekening](#). Fourier bleef namelijk lang vasthouden aan een zekere wet van Newton die stelt dat de warmte tweemaal zo hard stroomt als het temperatuurverschil tweemaal zo groot wordt. Biot had uit experimenten echter afgeleid dat dit verband bij hoge temperaturen met een derdemacht schaaft: als het temperatuurverschil verdubbelt, stroomt de warmte *acht* maal zo hard.

Fourier zond zijn werk, eind 1811 voltooid, in bij een wiskundewedstrijd over warmtestroming in vaste stoffen. Hij won weliswaar, maar Laplace, Lagrange en Legendre hadden alsnog hun bedenkingen. De *mémoire* werd niet gepubliceerd, maar vormde wel de basis voor zijn latere boek (uit 1822).

Fouriers filosofie

Fouriers gezondheid was na zijn terugkeer uit Egypte aanzienlijk verslechterd. Hij heeft Isère en het veel koudere klimaat waar hij maar niet aan kon gewinnen zelfs het ‘thuisland van reuma’ genoemd. In zijn huis stond de kachel nooit uit en hij droeg ook ’s zomers een warme jas. Het concept van warmte was in zijn dagelijks leven geworteld, dat staat wel vast.

De gebruikelijke warmtetheorie van die tijd beschreef een vloeistofachtige substantie, de *calor*, die door lichamen of gassen kon ‘stromen’ van warm naar koud totdat een thermisch evenwicht ontstond. De mysterieuze, massalozе calor zou worden aangetrokken door

moleculen en kon niet worden gecreëerd of vernietigd. De precieze werking ervan was echter een raadsel. Men was er wel over eens dat deze calor (wat die dan ook moge wezen) werd aangetrokken door lagere temperaturen. Daarnaast bestond een kinetische golftheorie, die warmtefenomenen beschreef via de bewegingen van deeltjes.

Fourier was agnost in deze discussie. Hij poogde vooral warmte te beschrijven aan de hand van wiskundige formules en vergelijkingen, ongeacht de fysische leest waarop de warmte geschoeid was. In de inleiding van zijn boek schrijft hij bijvoorbeeld:

On ne pourrait former que des hypothèses incertaines sur la nature de la chaleur, mais la connaissance des lois mathématiques auxquelles ses effets sont assujétis est indépendante de toute hypothèse.

(We zouden slechts onzekere veronderstellingen kunnen vormen over de aard van warmte, maar de kennis van de wiskundige wetten waaraan haar effecten onderworpen zijn, is onafhankelijk van iedere aanname.)

Hij vervolgt dat het om deze reden noodzakelijk is om alle definities en beginselen duidelijk uiteen te zetten alvorens aan het rekenen te slaan, zoals een goede wiskundige betaamt. Later herhaalt hij dat de genoemde wetten rigoureuus kunnen worden afgeleid, « *indépendamment de toute explication physique*; » los van enige natuurkundige interpretatie dus.

Het is ook aardig om op te merken dat de moderne notatie voor 'de integraal over het interval [a,b]' – die de oppervlakte van de grafiek van een functie op dat interval uitrekent – aan Fourier te danken is. [Gottfried Wilhelm Leibniz](#)' symbool \int , een gestileerde lange letter s, voor integralen en primitieven was reeds algemeen in gebruik in Fouriers tijd. Zijn vernieuwing was de notatie

$$\int_a^b$$

met grenzen. Ze sloeg meteen aan en zelfs Poisson moest toegeven dat dit toch wel erg handig was. Ook de zogeheten 'methode van Fourier' voor differentiaalvergelijkingen, ook bekend als scheiding van variabelen, speelt een belangrijke rol in zijn werk. Hij heeft deze

techniek weliswaar niet bedacht, maar wel toegepast op de warmtevergelijking zonder enige aannames op de functies die in de gestelde oplossing voorkomen. Vooral dit was vernieuwend.

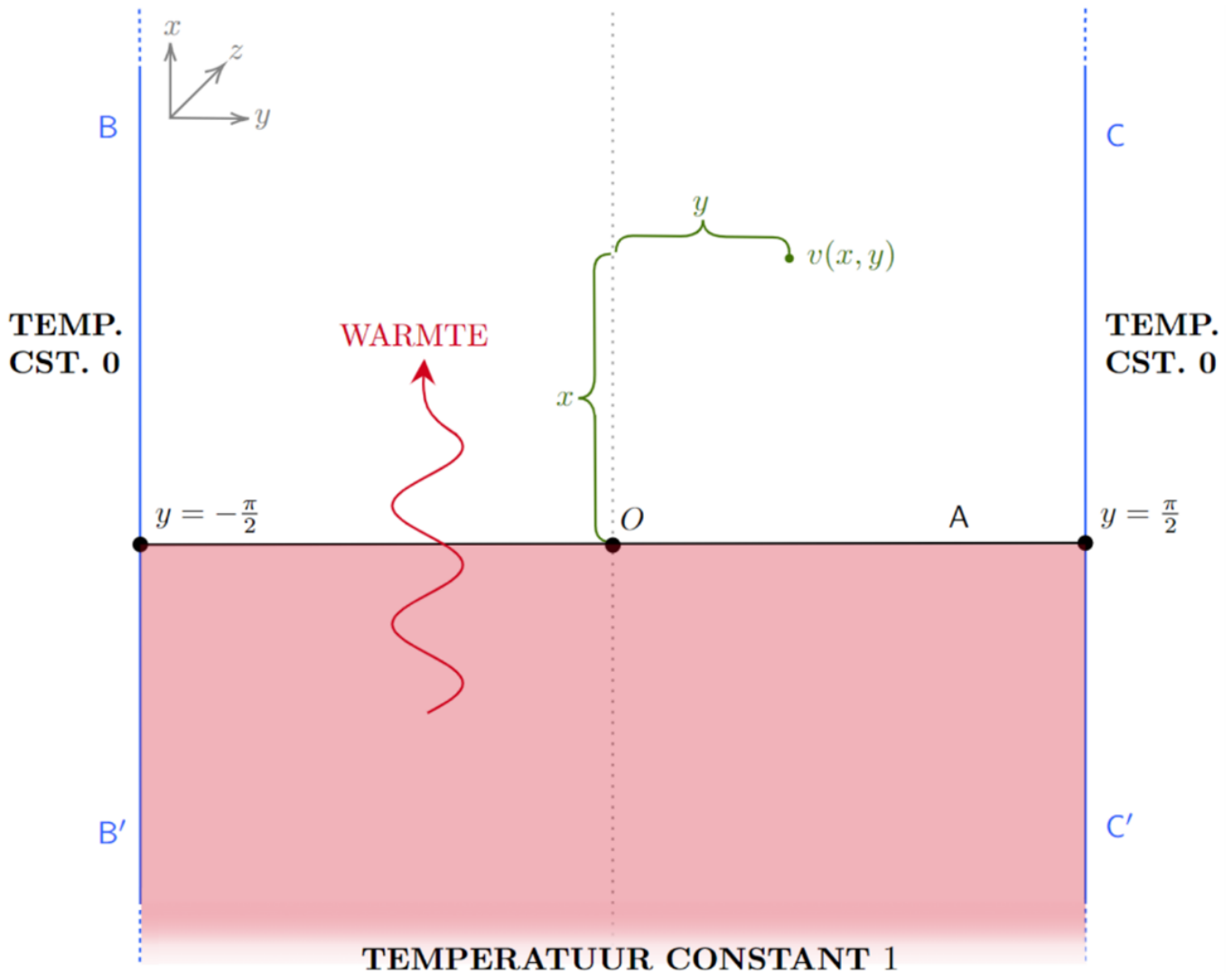
Laten we een voorbeeld van Fouriers berekeningen onder de loep nemen: de warmtevergelijking voor een vast lichaam met constante dichtheid. Als (t) de tijdsveranderlijke weergeeft en (x,y,z) de ruimtelijke coördinaten, dan voldoet de temperatuur, die hij (v) noemt, aan de differentiaalvergelijking

$$\left(\frac{\text{d}v}{\text{d}t} = \frac{K}{C} \cdot D \right) \bigg(\frac{\text{d}^2v}{\text{d}x^2} + \frac{\text{d}^2v}{\text{d}y^2} + \frac{\text{d}^2v}{\text{d}z^2} \bigg) \bigg|_{t=0}$$

waarbij (K) , (C) en (D) natuurkundige constanten zoals de warmtecapaciteit voorstellen. Het linkerlid in de bovenstaande vergelijking is de tijdsafgeleide van de temperatuur, dus de mate waarin deze in de loop van de tijd toe- of afneemt. Het rechterlid bevat de tweede afgeleiden in de drie ruimtelijke richtingen — hoe hard het temperatuursverschil verandert door het lichaam heen. Als we veronderstellen dat op het tijdstip $(t=0)$ op elke plek een bepaalde begintemperatuur geldt, bestaat er een *unieke* oplossing $(v(t))$ voor deze vergelijking, welke dus de warmteverdeling gedurende de tijd in het hele lichaam beschrijft.

Het doel is om deze oplossing te vinden. Dit doet Fourier bijvoorbeeld voor een hypothetische, oneindig lange, oneindig hoge plaat (met eindige dikte) ingesloten tussen twee oneindige ‘ijsblokken’, die niet van temperatuur veranderen, en rustend op een oneindig ‘kokendwaterbad’, dat ook niet van temperatuur verandert en de plaat van onderen opwarmt - zie de afbeelding hieronder. Hij hakt deze plaat in gedachten op in oneindig veel flinterdunne plakjes in de (z) -richting en doet, voor ieder zulk plakje, de volgende aanname: de temperatuur (v) is, als functie van (x) en (y) , te schrijven als een of andere functie van alléén (x) , maal eentje van alléén (y) . Dit is een grote vereenvoudiging die veel ingewikkelde functies uitsluit en er is van tevoren geen enkele reden waarom dit zou moeten werken. Als er echter een functie (v) van die vorm gevonden kan worden die aan de warmtevergelijking voldoet, dan is zij ook dé oplossing, omdat er maar één oplossing kan zijn! Door vervolgens de twee losse functies uit deze

veronderstelde oplossing te bestuderen vindt hij, met de nodige verantwoording en geniaal inzicht (en lange berekeningen!), wat nu de *fourierreeks* zou heten, “welke dient om een willekeurige functie te ontwikkelen als reeks gevormd uit sinussen en cosinussen van meerdere frequenties”.



Fouriers voorbeeld. Situatieschets van Fouriers oneindig lange balk (het witte middengebied), waarvan hier een dwarsdoorsnede in het (y,x) -vlak weergegeven is. De balk wordt van onder opgewarmd en is ingeklemd tussen ijsblokken.

Vive l'Empereur?

Terwijl Fourier zwoegde aan de warmteleer vanuit Isère, werd Keizer Napoleons leger juist geveld door een gebrek aan warmte na zijn dramatisch mislukte invasie van Rusland in 1812.

De Russische campagne is een mokerslag voor Napoleons gezag en de *Grande Armée*. Een

jaar later kantelt de voortslepende oorlog op het Iberische schiereiland in het voordeel van de geallieerden: de Engelse, Spaanse en Portugese legers rukken op in de richting van de Franse Pyreneeën. Zodoende wordt het einde van het Eerste Keizerrijk langzaam maar zeker ingeleid en voor het eerst moeten de Fransen op eigen grondgebied strijd leveren. In oktober 1814 wordt Napoleon in de Volkerenslag bij Leipzig verslagen door de Zesde Coalitie, bestaande uit Groot-Brittannië, Oostenrijk, Pruisen, Rusland en Zweden. Na de winter valt Parijs; de geallieerden delen de lakens uit.

De Bourbonmonarchie werd hersteld en de keizer verbannen naar Elba, gescheiden van zijn vrouw en zoontje. Lodewijk XVIII, de intelligente, moddervette en vermoeide broer van de geëxecuteerde vorige koning, keerde uit Engelse ballingschap naar Frankrijk terug. Net als het volk was hij, na een kwarteeuw politieke ellende, murw. Er volgden geen brute vervolgingen van tegenstanders. Hij wenste vooral een rustig koningschap en ook het volk kon het weinig schelen wie de macht had, als het maar vrede was. Lodewijk bezat hetgeen Napoleon en andere geopperde kandidaten voor het koningschap ontbeerden: legitimiteit.



De val van Napoleons rijk. Prent op de val van Napoleons keizerrijk uit 1814 door een

Fransman, vermoedelijk in Engeland. Na nederlagen in Spanje en Rusland, waar de keizerlijke stelten op rustten, stort hij neer te Fontainebleau, waar hij deemoedig aftreedt. Du haut en Bas...ou les Causes et les Effets, gekleurde ets, Metropolitan Museum of Art 2010.525, New York. Via [Wikimedia Commons](#).

Fourier behield zijn prefectuur onder voorbehoud, nu in dienst van de koning. Op weg naar zijn ballingschap op Elba zou Napoleon door Grenoble gaan; een ontstelde Fourier vreesde zijn toorn en voorkwam een ongemakkelijke ontmoeting door Napoleons route te laten wijzigen.

Lodewijk dreigde onderwijl tussen wal en schip te vallen. Besluiteloos als hij was, werd hij enerzijds beïnvloed door lieden die aanstuurden op een liberale overheid die de monarchie zou verenigen met de Revolutionaire en napoleontische tijd. Aan de andere kant was er 's konings jongere broer de Graaf van Artesië en zijn conservatieve kliek *ultraroyalistes* oftewel ultra's. Deze extremisten wilden het liefst volledig herstel van het *ancien régime* met absolute macht voor de koning. Artesiës relatie met Fourier was gelukkig vriendelijk: de graaf bezocht hem in Grenoble en had hem hoog in het vaandel.

Begin 1815 keerde Napoleon terug van Elba, waarmee de [Honderd Dagen](#) aanvingen. De geallieerde grootmachten Groot-Brittannië, Pruisen, Rusland en Oostenrijk schrokken zich het leplazarus en ondernamen actie. Napoleons aanhang groeide intussen gestaag op weg naar Parijs. De troepen die Lodewijk bleef sturen om hem tegen te houden liepen over. In Grenoble probeerde Fourier in lichte paniek openbare steun voor de koning teweeg te brengen want Napoleon zou nu wél door de stad passeren. Ondanks alle voorbereidingen van Fourier en Artesië om de voormalige keizer vooral niet welkom te heten sloot het lokale regiment zich bij Napoleon aan. Fourier richtte uit voorzorg een slaapkamer in, legde er een diplomatieke brief voor Napoleon klaar en kneep er vervolgens tussenuit. Hoewel Napoleon nijdig over Fouriers optreden was, nam hij hem toch opnieuw in dienst, nu als prefect van het *département* de Rhône.

Napoleon kwam aan in Parijs op dezelfde dag dat Lodewijk en zijn slinkende aanhang hun biezen hadden gepakt. Spoedig kreeg Fourier orders om monarchisten in zijn departement te 'zuiveren'; hij nam ontslag en verhuisde naar de hoofdstad met een pensioen van 6.000 frank van Napoleon. Toch een blijk van waardering voor de vele dienstjaren. Het werd alleen nooit

uitbetaald omdat de keizer werd verslagen bij Waterloo: de Engelse en Pruisische legers maakten een definitief eind aan het Eerste Keizerrijk. Napoleon trad nu echt af en de monarchie werd op 8 juli 1815 opnieuw hersteld. Lodewijk XVIII kon echter niet beletten dat de ultra's onder leiding van zijn broer hun eigen versie van de Terreur tegen de Bonapartisten ontketenden, vooral in het zuiden van Frankrijk.

Het was maar goed dat Fourier zich achter de Bourbonrestauratie had geschaard en op goede voet met de Graaf van Artesië stond: de ultra's executeerden en lynchten (voormalige) aanhangers van Napoleon. Complotten waren schering en inslag. Koning Lodewijk was ervan overtuigd dat ze zelfs hem uit de weg zouden ruimen gegeven de gelegenheid — met een kwinkslag merkte hij over zijn broer het volgende op:

Que voulez-vous ? Il a conspiré contre Louis XVI, il a conspiré contre moi, il conspirera contre lui-même.

(Wat had u gewild? Hij heeft samengezworen tegen Lodewijk XVI, hij heeft samengezworen tegen mij, straks gaat hij samenzweren tegen zichzelf.)

De koning ontzegde Fourier nu al diens gelden, ook die horende bij zijn baronie, in verband met zijn diensten onder Napoleon. Berooid en werkloos wilde Fourier terugkeren naar het onderzoeksleven. Opnieuw had hij geluk: de prefect van de Seine, een mede-savant, stelde hem aan als directeur van het Bureau de Statistique aldaar.

Een wiskundig gedicht

In 1816 werd Fourier verkozen als lid van de Académie des Sciences in Parijs. Tevens begon Fouriers reputatie te verbeteren: in de daaropvolgende jaren werd hij lid van de Royal Society en de wetenschappelijke academie van Sint-Petersburg. Hij sloot vriendschappen met onder anderen Hans Christian Ørsted – de Deense ontdekker van het verband tussen elektriciteit en magnetisme – en Peter Gustav Dirichlet en Niels Henrik Abel, beiden jonge en vaardige wiskundigen. Hoewel Fourier graag het gezelschap van intelligente dames genoot, is hij nooit getrouwd. Wel raakte hij goed bevriend met de briljante getaltheoretica Sophie Germain. Gedurende de jaren 1820 zouden zij vele brieven wisselen waarin zij wiskunde en elkaars werk bespraken. Hij verhaalde ook veel over zijn reis naar Egypte, zoals altijd met een

wiskundige nauwkeurigheid in plaats van door de gebeurtenissen aan te dikken. Hij bleef tevens doorgaan met de publicatie van de *Description de l'Égypte*.

Het hoogtepunt van Fouriers carrière was wellicht 1822. Hij betrad de prestigieuze post van *secrétaire perpétuel* van de Académie en zijn boek over de warmteleer werd gepubliceerd. Het oogste veel lof en zou de basis van de moderne fourieranalyse vormen. Overigens waren Fouriers methodes wel anders dan die van nu, deels omdat veel wiskunde die heden ten dage standaard is, simpelweg nog niet was ontwikkeld. Waar een tegenwoordige wis- of natuurkundige een fourierreeks in één regel opschrijft, had de naamgever tientallen pagina's nodig, maar het is natuurlijk juist dankzij Fouriers inspanningen dat wij dat op z'n janboerenfluitjes kunnen. Die inspanningen hebben een boek van honderden pagina's voortgebracht. Lord Kelvin, bekend van de temperatuureenheid, schijnt Fouriers werk een "wiskundig gedicht" te hebben genoemd. Het moge duidelijk zijn dat dit dan geen limerickje betreft, maar een homerisch epos!



Dit standbeeld van Fourier in zijn geboortestad Auxerre van Faillot (1849) werd tijdens de Tweede Wereldoorlog door de nazi's omgesmolten voor wapens. Twee reliëfs op de sokkel zijn de nacht ervoor gered. [Foto uit de stadsarchieven van Auxerre.](#)

Ook na zijn succesvolle werk over de warmtetheorie (behoudens Biot en Poissons tegenwerpingen) bleef Fourier actief de wetenschap bedrijven. Hij deed onderzoek naar zowel zuivere als meer toegepaste wiskunde en verrichte zijn administratieve taken als secretaris van de Académie. In Frankrijk heerste intussen betrekkelijke rust op politiek vlak. Maar niet voor lang.

Alweer een koning zonder hoofd

In 1824 verslechterde de gezondheid van Lodewijk XVIII aanzienlijk. Zijn jicht tergde hem, koudvuur kroop in zijn benen en hij was inmiddels zo dik dat zijn nek het majesteitelijke hoofd niet langer kon ondersteunen. Het parlement werd overheerst door de ultra's. De Graaf van Artesië volgde zijn broer na diens dood in september op als Karel X. Hij was op z'n zachtst gezegd een regelrechte ramp. Lodewijk had tegen het einde van zijn leven al gesteld: "U beklagt zich over een koning zonder benen; u zult nog eens zien hoe een koning zonder hoofd is." Hij kreeg gelijk.

Dat Karel, in tegenstelling tot zijn realistischere broer, in aperte ontkenning verkeerde van de gebeurtenissen sinds 1789 is nog tot daaraan toe. Hij regeerde als absolutist en voerde afgeschafte gebruiken, zoals de zalving van de koning, opnieuw in. Vrijheden werden ingeperkt en de censor draaide overuren. Het volk vond het gauw welletjes. Na zes jaar aanwassende ellende zou in 1830 de Julirevolutie uitbreken die een einde maakte aan het bewind van Karel X en de ultra's. Sterker nog: het was *fin* voor de Franse hoofdtak van de Bourbondynastie. Karel werd niet opgevolgd door zijn zoontje maar door de Hertog van Orléans als constitutionele monarch. Deze zou als Lodewijk Filips I, de liberale Burgerkoning, een van Frankrijks betere vorsten worden. Fourier zou het evenwel niet meer meemaken.

Helaas was namelijk ook de gezondheid van onze hoofdpersoon sinds Egypte nooit goed geweest. Naast reuma en koude-intolerantie leed hij aan een hartkwaal die in 1830 verergerde.

Hij valt op 4 mei van een trap, waarna zijn situatie snel bergafwaarts ; op 16 mei krijgt hij een toeval. Terwijl hij, in bed gelegen, met de arts praat, begint hij plotseling te roepen dat hij op sterven is. Hij overlijdt nog diezelfde dag, 62 jaar oud, aan een hartaanval.

Er werd geld ingezameld voor een herdenking (tot weiniger verbazing droegen Biot en Poisson niet bij) en net als zijn mentor Monge is Fourier begraven op de Cimitière du Père-Lachaise in Parijs[†]. Zijn grafsteen is versierd in Egyptische stijl.

Hoewel Fouriers warmtetheorie en de wis- en natuurkundige gevolgen daarvan ongetwijfeld

zijn belangrijkste nalatenschap zijn, heeft hij nog veel meer betekend voor de wetenschap en de samenleving. Zijn werkwijze en filosofie vormen een hoeksteen van de moderne natuurwetenschap. Hij heeft een nieuwe generatie geleerden opgeleid aan de École Polytechnique, belangrijk administratief en diplomatiek werk verricht als bestuurder in Frankrijk en Egypte, en bijgedragen aan de egyptologie en archeologie.

Fourier was ongetwijfeld een van de grootste geleerden van zijn tijd.

[*] Een *partiële differentiaalvergelijking van tweede orde*: dat wil zeggen dat zij functies 'opeet' en een formule uitspuugt die afhangt van de functies zelf maar ook hun eerste en tweede afgeleiden naar zowel plaats als tijd. Zie verderop.

[†] Monge zou later naar de crypten van het Panthéon worden verplaatst, waar ook Lagrange ligt.