Van wiskundige nieuwsgierigheid naar natuurkundige inzichten

Een natuurkundige theorie bestuderen waarin de lichtsnelheid c verwaarloosbaar klein is: dat klinkt als een heel slecht plan. Want beweegt licht (in vacuüm) niet met een constante snelheid van ongeveer 300.000 kilometer per seconde? Dat is zo, maar toch blijkt het in sommige natuurkundige situaties mogelijk te zijn om deze wiskundige benadering te maken waarbij c naar nul gaat.



Afbeelding 1. Lewis Carroll. Lewis Carroll (Charles Dodgson), schrijver van Alice in Wonderland en Through the Looking-Glass, waaraan de Carrolliaanse natuurkunde haar naam ontleent. Foto: zelfportret van Lewis Carroll, 1857

(collectie National Portrait Gallery, Londen). Publiek domein, via Wikimedia Commons.

In het artikel “Carrolliaanse natuurkunde” liet Jildou Hollander zien wat er gebeurt als je de lichtsnelheid c steeds kleiner maakt: Alice en de rode koningin rennen in het boek *Through the Looking-Glass* zo hard ze kunnen en blijven toch op dezelfde plek. Het artikel gaf een voorbeeld van hoe Carrolliaanse natuurkunde terugkomt in holografische theorieën. Maar dat is niet de enige plek waar Carrolliaanse natuurkunde opduikt.

De rand van een zwart gat

In “Zwarte gaten (2): de horizon” legde Marcel Vonk uit wat een ontsnappingssnelheid is: de minimale snelheid v die je nodig hebt om aan een object met massa M te ontsnappen. In een formule:

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{r}},$$

waarin G de zwaartekrachtsconstante van Newton is en r de afstand tot het middelpunt van het object. Op de horizon van een zwart gat is de ontsnappingssnelheid gelijk aan de lichtsnelheid c.

Een beeld dat hierbij helpt, al klopt het niet in alle details: je kunt de ruimte aan de horizon voorstellen als een naar binnen bewegende loopband die op de maximale stand staat, namelijk op de lichtsnelheid. Een sporter op deze loopband kan een noodlottige val voorbij de horizon, het zwarte gat in, nét niet voorkomen. Daarvoor zou ze namelijk net zo hard moeten rennen als de loopband, maar dat kan alleen als ze zoveel massa verliest dat ze massaloos wordt. En ook al rent ze wél zo hard als het licht: op dezelfde plek blijven is het maximaal haalbare.

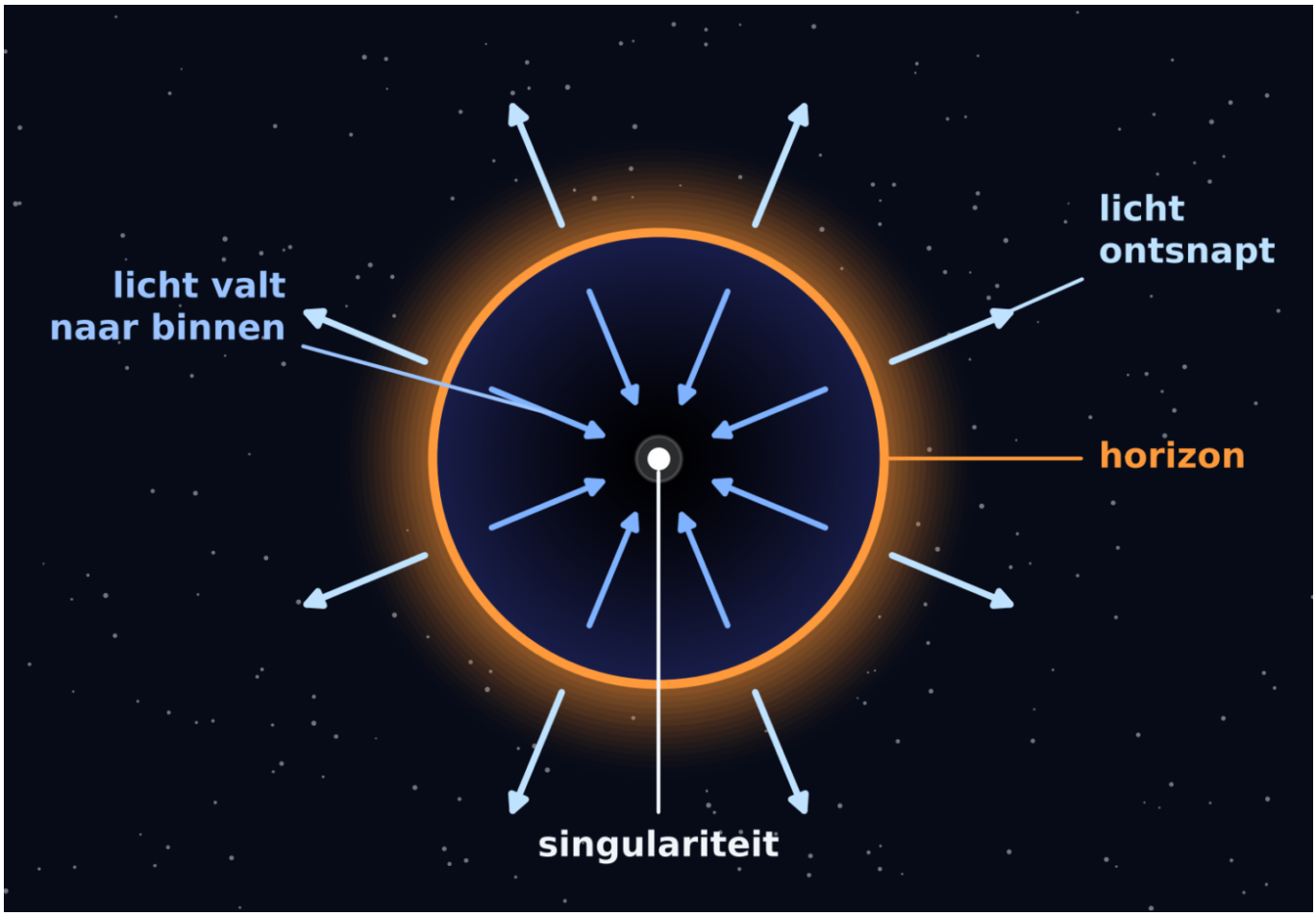
Hetzelfde gebeurt met lichtstralen die in de buurt van de horizon van een zwart gat naar buiten proberen te ontsnappen. Zo’n lichtstraal beweegt met snelheid c ten opzichte van de ruimte, terwijl die ruimte zelf met snelheid v naar binnen beweegt. Buiten de horizon geldt $v < c$ en komt het licht weg. Voor een waarnemer ver weg van de horizon zijn de twee snelheden op de horizon precies gelijk en heffen ze elkaar op, waardoor licht aan de

rand van een zwart gat effectief stilstaat.

Wie zelf met de ruimte mee naar binnen valt, merkt bij het passeren van de horizon niets bijzonders: voor die waarnemer beweegt licht gewoon met de lichtsnelheid \(c\).

Vlak bij de singulariteit

Voor de sporter die in het zwarte gat is gevallen, is er nóg een kans om Carrolliaanse natuurkunde te beoefenen. Zoals je in dit artikel kunt lezen, staat er je nog maar één ding te wachten zodra je voorbij de horizon van een zwart gat bent gevallen: het punt met oneindige kromming in het midden van dat zwarte gat – de singulariteit.



Afbeelding 2. Een zwart gat. Schematische doorsnede van een zwart gat: de horizon en de singulariteit in het midden. Buiten de horizon kan licht ontsnappen; erbinnen valt het onvermijdelijk naar de singulariteit.

Wat er gebeurt vlak voordat je de singulariteit raakt, onderzochten de natuurkundigen Vladimir Belinski, Isaak Khalatnikov en Evgeny Lifshitz in het begin van de jaren zeventig.

Hun vermoeden, dat in het artikel “Kosmologisch biljart” nader wordt toegelicht, is dat de ruimtetijd daar niet geleidelijk vervormt, maar in een duizelingwekkend tempo verandert.

De vergelijkingen van Einstein die de kromming van ruimte en tijd beschrijven bevatten onder andere twee typen wiskundige bewerkingen: tijdsafgeleiden (die beschrijven hoe grootheden veranderen in de loop van de tijd) en ruimtelijke afgeleiden (die beschrijven hoe een plek in de ruimte wordt beïnvloed door zijn directe omgeving). Vlak bij de singulariteit voltrekt de dynamiek in de tijd zich echter in zo’n extreme, gewelddadige versnelling dat de tijdsafgeleiden volledig dominant worden. De ruimtelijke afgeleiden vallen daardoor in het niet en worden verwaarloosbaar. Dit heeft een ingrijpend gevolg voor de theorie. Omdat de ruimtelijke invloeden wegvallen, hoeft elk punt in de ruimte zich opeens niets meer aan te trekken van wat er vlakbij gebeurt. Normaal gesproken zijn de vergelijkingen voor verschillende punten aan elkaar gekoppeld, omdat de ruimtelijke afgeleiden naar de buren “kijken”. Zonder die afgeleiden raken de vergelijkingen ontkoppeld: voor elk punt staat er een eigen vergelijking, die niets meer van de andere punten weet.

Vlak bij een singulariteit wordt de natuurkunde dus ultralokaal: elk punt in de ruimte ondergaat zijn eigen geïsoleerde reeks veranderingen, alsof de rest van het heelal niet bestaat. Er plant zich niets meer voort van punt tot punt, alleen de tijd loopt in elk punt afzonderlijk door. Dat komt overeen met de Carrolliaanse limiet van de Lorentztransformaties uit de relativiteitstheorie, zoals Jildou in haar artikel beschreef: de plaats blijft hetzelfde en alleen de tijd transformeert. De wilde dynamiek in het hart van een zwart gat blijkt daarmee te kunnen worden beschreven door de wiskunde van een Carrolliaanse wereld.

De horizon van het heelal

Niet alleen zwarte gaten, maar ook het heelal op grote schaal herbergt een grens: de kosmologische horizon. Het heelal dijt uit: hoe verder een sterrenstelsel van ons af staat, hoe sneller het van ons wegbeweegt. Dit verband is vastgelegd in de wet van Hubble-Lemaître:

$$v = Hd.$$

Hierin is v de snelheid waarmee een stelsel van ons wegbeweegt, d de afstand en H de Hubble-parameter, een getal dat aangeeft hoe snel het heelal uitdijt. Verdubbel je de afstand d, dan verdubbelt de snelheid v. Op een bepaalde afstand wordt v dus

precies gelijk aan de lichtsnelheid c. Die afstand heet de Hubble-straal:

$$R_H = \frac{c}{H}.$$

Ver voorbij de Hubble-straal geldt dus $v \gg c$: die stelsels vliegen veel sneller dan het licht van ons weg. Dat is in zichzelf geen schending van Einsteins regel dat niets sneller dan het licht door de ruimte kan bewegen: het stelsel zelf beweegt niet zo snel, het is de ruimte ertussen die zo snel uitdijt.

Dit alles heeft een opvallend gevolg voor wie een signaal naar een ver stelsel wil sturen. Zo'n stelsel vliegt zo snel van ons weg dat een lichtstraal de afstand nooit meer kan overbruggen: terwijl het licht onderweg is, komt er tussen ons en dat stelsel zoveel ruimte bij dat de afstand effectief sneller groeit dan het licht hem kan afleggen. Het is de loopband van de horizon van het zwarte gat, maar nu voor het hele heelal: wat ver genoeg weg ligt, is voor ons onbereikbaar. Hetzelfde geldt voor elk paar stelsels dat ver genoeg van elkaar staat: ze kunnen elkaar niet meer beïnvloeden. Elk stelsel leeft als de uitdijing maar lang genoeg doorgaat uiteindelijk dus in zijn eigen, lokale wereldje, net als vlak bij de singulariteit van een zwart gat.

Wiskundig kun je zo'n wereld wederom beschrijven door de lichtsnelheid naar nul te sturen. Dan krimpt de Hubble-straal $R_H = c/H$ naar nul en ligt elke afstand d, hoe klein ook, erbuiten. Voor een waarnemer in zo'n stelsel verschrompelt haar wereld tot een stip en wordt zo een Carrolliaanse wereld.

Een materiaal waarin niets kan bewegen

Het laatste voorbeeld ligt dichter bij huis, binnen handbereik zelfs: grafeen, een vel koolstofatomen in een plat honingraatpatroon, slechts één atoom dik.

Wat grafeen bijzonder maakt, is hoe de elektronen erin bewegen. Om dat te begrijpen, heb je twee grootheden nodig. Elk deeltje heeft een *energie* E en een *impuls* p, grofweg een maat voor hoe hard het deeltje beweegt. Het verband tussen die twee kun je tekenen in een grafiek. In de vastestoffysica, de tak van de natuurkunde die de eigenschappen van vaste materialen bestudeert met behulp van de quantummechanica, heet zo'n grafiek een *energieband*.

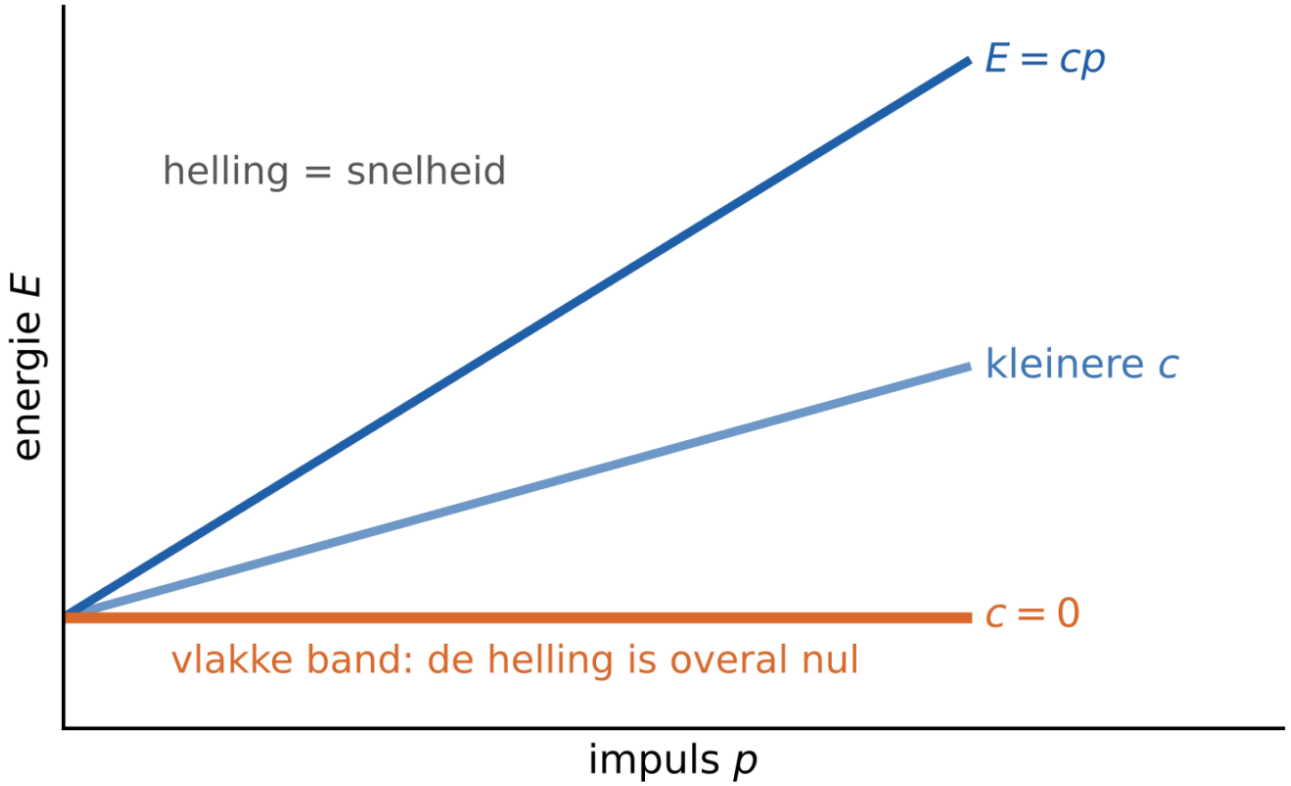
Die band vertelt ook hoe snel een deeltje beweegt, want de snelheid \(v\) van een deeltje blijkt de helling van zijn band te zijn:

$$v = \frac{dE}{dp}.$$

Voor licht, en voor elk ander deeltje zonder massa, is de band een rechte lijn:

$$E = cp.$$

De helling van die lijn is precies de lichtsnelheid \(c\). Verklein je \(c\) in gedachten, dan wordt de lijn vlakker. Stuur je \(c\) naar nul, dan ligt de lijn horizontaal: de energie is voor elke impuls hetzelfde, de helling is overal nul en dus is de snelheid nul, zie afbeelding 3. Een deeltje dat meer impuls krijgt, krijgt er toch geen snelheid bij; het kan nergens heen. Natuurkundigen noemen dit verschijnsel een *vlakke band* (flat band).



Afbeelding 3. Energiebanden. De energie E uitgezet tegen de impuls p voor een deeltje zonder massa. De helling van de lijn is de snelheid. Hoe kleiner c, hoe vlakker de lijn; voor c = 0 is de band vlak.

Bestaat zoiets ook in een echt materiaal? Zeker weten, namelijk in grafeen. De elektronen in

grafeen gedragen zich bij lage energie alsof ze geen massa hebben: ze volgen dezelfde regel als licht, $E = vp$, maar dan met een veel kleinere “lichtsnelheid” v: ongeveer driehonderd keer zo klein als de echte lichtsnelheid.

Leg je twee van zulke laagjes grafeen op elkaar en draai je het bovenste ten opzichte van het onderste over een heel kleine hoek, dan gebeurt er iets opmerkelijks. Bij bepaalde “magische” hoeken staan de elektronen vrijwel stil: v zakt naar nul en de band wordt vlak. Bij zulke hoeken blijkt gedraaid grafeen in experimenten bovendien supergeleidend te kunnen worden, wat betekent dat er stroom zonder weerstand loopt.

Niemand heeft hier de lichtsnelheid op nul gezet: de koppeling tussen de twee lagen brengt de “lichtsnelheid” van de elektronen zelf naar nul. Er wordt beargumenteerd dat Carrolliaanse natuurkunde in systemen met vlakke banden vanzelf opduikt, een idee dat onder meer uitgewerkt is voor gedraaid grafeen. Of deze Carrolliaanse beschrijving ook echt helpt om de supergeleiding in gedraaid grafeen te begrijpen, is nog niet geheel duidelijk.

Van het heelal tot een laagje koolstof

In alle vier de voorbeelden die ik in dit artikel heb beschreven komt licht niet verder dan zijn directe omgeving. De reden verschilt per situatie, maar het gevolg is steeds hetzelfde: er plant zich niets meer voort in de ruimte. In werkelijkheid is in zulke situaties c natuurlijk nooit exact gelijk aan nul. Waar het op neer komt, is dat je op zulke plekken, met de juiste overwegingen, de lichtsnelheid in gedachten wel als effectief gelijk aan nul kunt beschouwen. De Carrolliaanse natuurkunde biedt vervolgens een wiskundige taal om te beschrijven wat er dan gebeurt. Dat dit op kosmologische, astronomische en microscopische schaal kan, van het heelal tot aan een enkel laagje koolstof, laat zien dat het bestuderen van deze vreemde theorieën meer is dan slechts een wiskundige nieuwsgierigheid.