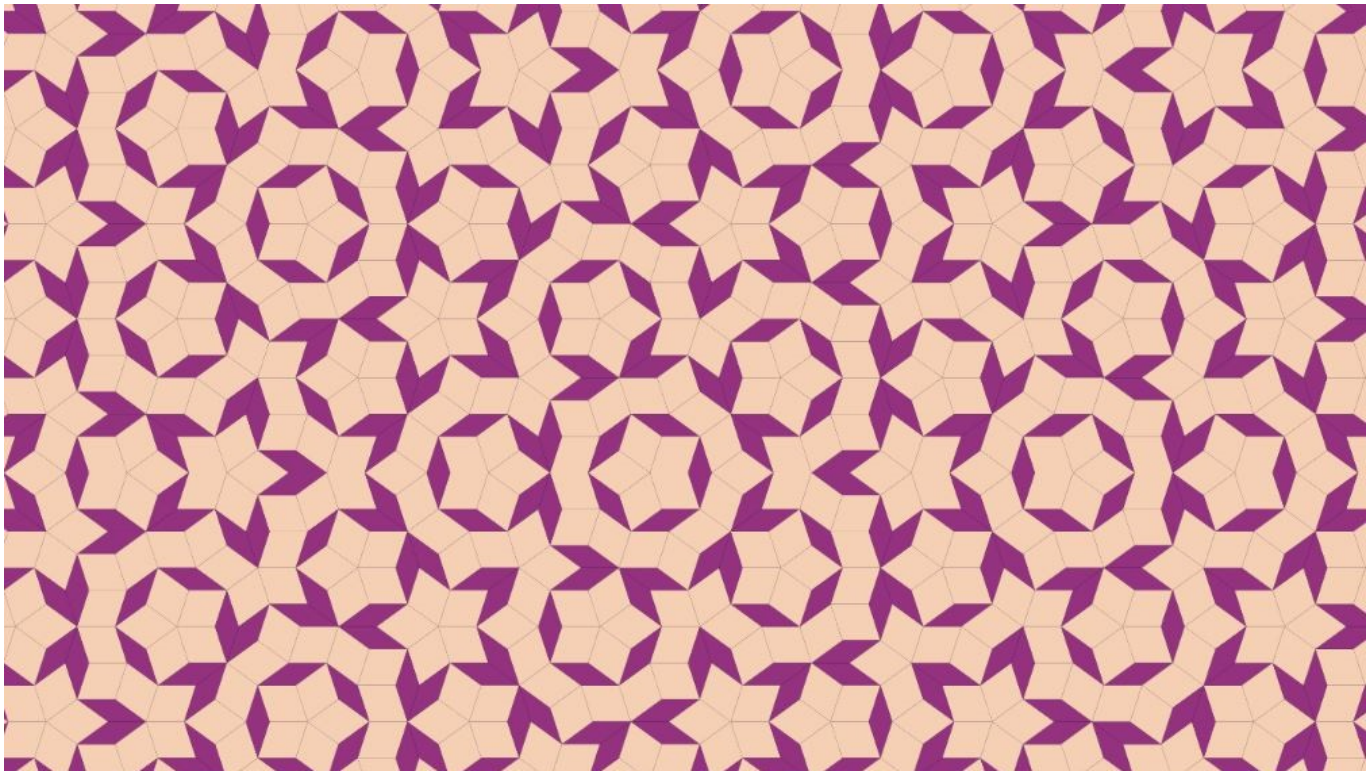
Waarom herhalen Penrosebetegelingen nooit?

Natuurkundigen houden van regelmaat. Ze zien overal patronen: in de roosters van atomen in kristallen of in de opbouw van atoomkernen uit protonen en neutronen. Bij de term ‘patroon’ denk je aan iets herhalends, maar er zijn ook patronen die zichzelf nooit herhalen. Penrosebetegelingen zijn daar een goed voorbeeld van. Maar waarom bestaan zulke niet-herhalende patronen eigenlijk?



Een Penrosebetegeling. Het patroon lijkt regelmatig, maar herhaalt zichzelf nooit. Afbeelding gemaakt met de Pattern Collider van Aatish Bhatia.

Recent was de einstein in het nieuws – niet de beroemde natuurkundige, maar een meetkundige vorm (één steen – *ein stein*, dus) waarmee je een patroon kunt bouwen dat zichzelf nooit herhaalt. Na jaren zoeken was het eindelijk gelukt om een vorm met die eigenschap te vinden; Suzanne Bintanja schreef er op deze website dit artikel over.

Zichzelf niet herhalende patronen die je uit twéé vormen kunt bouwen waren al veel langer bekend. De bekende wis- en natuurkundige en Nobelprijswinnaar Roger Penrose ontdekte daar in de jaren 70 van de vorige eeuw een eerste voorbeeld van. Ook over Penrosebetegelingen, zoals de patronen worden genoemd, hebben we het op onze website al eens gehad: zie dit artikel van Sophie Schot.

Dat er regelmatige maar niet-herhalende patronen bestaan, lijkt een curiositeit, maar ook daar zit weer mooie wiskunde en logica achter. Het blijkt namelijk heel goed mogelijk om te begrijpen waaróm Penrosepatronen bestaan en waarom ze zichzelf nooit herhalen – en als je dat begrijpt kun je heel gemakkelijk een groot aantal andere, soortgelijke patronen ontwerpen.

Het basisidee is eenvoudig: teken op een vel papier een groot aantal parallelle lijnen, op vaste afstanden van elkaar. Teken vervolgens een tweede set van zulke lijnen, maar nu onder een hoek met de eerste. Kies je als hoek 90 graden, dan ben je klaar: je hebt een regelmatig patroon van kruispunten getekend. Natuurlijk kun je de tweede set lijnen nóg een keer negentig graden draaien rond een van de kruispunten, maar als je dat doet vind je de eerste set terug.

Iets anders wordt het als je de hoek van draaiing 60 graden kiest. Je kunt de eerste set lijnen dan draaien; de tweede nog een keer om één van de snijpunten, en pas bij de derde keer draaien kom je weer bij de oorspronkelijke set uit. Maar het resultaat is in zoverre hetzelfde, dat je ook dan weer een regelmatig patroon hebt gevonden.

Een "pentagrid". Vijf sets van parallelle lijnen, steeds 72 graden gedraaid ten opzichte van elkaar, vormen de basis van een Penrose-patroon. Screenshot uit de video van MinutePhysics.

90 graden is een kwart van 360 graden (dus van een volledige draai); 60 graden is een zesde van 360 graden. Wiskundigen generaliseren graag, dus wat nu als we de tussenliggende optie kiezen, en ons patroon 72 graden draaien – een vijfde van 360 graden? Het lijnenpatroon komt dan na vijf keer draaien terug op zichzelf, maar er is een groot verschil met de gevallen van 60 en 90 graden: het lijnenpatroon is nu niet periodiek – het herhaalt zichzelf niet als je het in de richting van één van de lijnen verschuift!

Dat laatste is eigenlijk niet eens zo heel bijzonder. Als je een zevende, eenendertigste of honderdenzestiende van 360 graden had gekozen, had je ook geen periodiek patroon gevonden. Bij de meeste hoeken die een fractie van 360 graden zijn zal ons patroon zich níét herhalen; het is juist bijzonder dat dat bij 90 en 120 graden wél gebeurt!

Hoe komen we nu van een lijnenpatroon bij een betegeling? Dat is eenvoudig: teken op elk kruispunt van het lijnenpatroon een klein tegeltje waarvan de zijden een vaste lengte hebben en loodrecht op de lijnen staan. Schuif alle tegels die je zo krijgt tegen elkaar aan, en wat je vindt is een Penrose-betegeling. Het is misschien moeilijk om je dat voor te stellen, maar gelukkig heeft Henry Reich er voor het YouTubekanaal MinutePhysics een mooi filmpje over

gemaakt, dat je hier kunt bekijken:

In het filmpje wordt ook uitgelegd waarom het patroon bij een hoek van 72 graden zichzelf nooit herhaalt: de reden is dat de sinussen van de belangrijkste hoeken in dat patroon, 36 en 72 graden, geen verhouding hebben die precies een breuk is. Datzelfde geldt voor patronen met zeven, eenendertig of honderdzestien sets lijnen. Alleen bij heel bijzondere gevallen zoals 120 graden draaien (waar de lijnen elkaar kruisen onder hoeken van 60 en 120 graden) vind je wél een breuk. De video laat zien hoe je op die manier kunt begrijpen dat bijna alle Penrose-achtige patronen zichzelf niet zullen herhalen.

Vind je al dat gereken met sinussen maar niets, dan kun je ook een goed gevoel krijgen van het hoe en waarom van Penrose-betegelingen door er simpelweg mee te spelen. Daarvoor bestaat ook een geweldige website:

Pattern Collider

gemaakt door Aatish Bhatia. Op die site kun je zelf kiezen in hoeveel delen je de hoek van 360 graden verdeelt, hoe je de sets lijnen ten opzichte van elkaar schuift, enzovoort – en zie je voor je ogen de onregelmatige (en soms regelmatige) patronen ontstaan.