

Zie de maan schijnt...

Nu de Sint in het land is, is het “zie de maan schijnt...” overal te horen. Een goede reden om ook op de Quantum Universe-website iets over maneschijn te schrijven – al betreft het hier dan wel maneschijn van een heel andere soort...



Afbeelding 1. Moonshine. De afbeelding die [Peter Diamond](#) maakte voor bij het artikel voor [Quanta Magazine](#).

$196.884 = 196.883 + 1$. Het lijkt een nogal onbenullige vergelijking, maar achter deze bijzonder eenvoudige optelsom blijkt een schat aan wiskundige en – zoals we sinds kort weten – natuurkundige informatie schuil te gaan.

Het getal 196.884 kwam voor het eerst prominent in de wiskunde voor in het werk van de Duitse wiskundige Felix Klein, in de 19e eeuw. Klein bestudeerde wiskundige functies met bijzondere symmetrie-eigenschappen, waarvan de beroemdste tegenwoordig bekend staat

als de j-functie. De j-functie is een som van oneindig veel termen, waarvan de derde de coefficient 196.884 heeft.

Verrassend genoeg komt ook het getal 196.883 voor in de wiskunde, maar op een totaal andere manier. Een belangrijke structuur in de wiskunde is die van een *groep* – een wiskundige term voor een verzameling van objecten die we met elkaar kunnen vermenigvuldigen. Onze ‘gewone’ getallen vormen dus een groep, maar er blijken nog allerlei andere systemen te zijn met een dergelijke groepsstructuur. De systemen met een *eindig* aantal objecten die deze structuur hebben zijn zelfs volledig geïnclassificeerd. Ze vallen uiteen in een aantal regelmatige reeksen plus een beperkt aantal ‘bijzondere gevallen’. De grootste van deze bijzondere vermenigvuldigingsstructuren wordt de *monstergroep* genoemd, en bestaat uit maar liefst zo’n 10^{53} elementen!

Het moge duidelijk zijn dat het beschrijven van zo’n gigantische structuur niet eenvoudig is. Gelukkig bestaat er voor die beschrijving een hulpmiddel: de elementen die de monstergroep vormen kunnen gezien worden als symmetrie-operaties in bepaalde hogerdimensionale ruimtes. Er zijn zelfs oneindig veel manieren om dit te doen. In het eenvoudigste geval is de ruimte waarvan de monstergroep symmetrieën beschrijft ééndimensionaal – een lijn, dus. In het op één na eenvoudigste geval heeft deze ruimte maar liefst 196.883 dimensies!



Afbeelding 2. John McKay. De ontdekker van de monstrous moonshine. Foto: Chilton Computing.

In de wiskunde komen onnoemelijk veel getallen voor, dus het voorkomen van twee grote getallen die met maar één verschillen, zou in eerste instantie natuurlijk best toeval kunnen zijn. Desondanks was John McKay – de eerste wiskundige die dit verband opviel, in 1978 – zeer verbaasd over dit toeval. De verbazing werd alleen maar groter toen een andere wiskundige, John Thompson, liet zien dat ook de volgende hogerdimensionale ruimte die in de wiskunde van de monstergroep een rol speelt, een aantal dimensies heeft (21.493.760, om precies te zijn) dat overeenkomt met de som van drie coëfficiënten van Kleins j-functie. De kans op toeval werd daarmee natuurlijk een stuk kleiner.

Jarenlang stonden wiskundigen voor een raadsel. Men had geen flauw benul *waarom* deze mysterieuze getallen op twee ogenschijnlijk totaal verschillende plaatsen in de wiskunde voorkwamen. Het raadsel kreeg ook een naam: het werd *monstrous moonshine* genoemd – ‘monstrous’ vanwege de monstergroep, en ‘moonshine’ vanwege de schoonheid en ongrijpbaarheid van het vraagstuk. In de loop der jaren werden er bovendien nog diverse andere voorbeelden gevonden waarin dimensies van ruimtes waarop bijzondere groepen werken gelijk zijn aan coëfficiënten van speciale functies. Ook deze voorbeelden kwamen

bekend te staan onder de naam 'moonshine'.

Het verhaal van de moonshine is uitermate interessant, maar waarom vertellen we het op een website die over natuurkunde gaat? Omdat de oplossing van het moonshine-raadsel heel veel met natuurkunde te maken blijkt te hebben! Het blijkt mogelijk te zijn om deze bijzondere relaties tussen getallen in de wiskunde te begrijpen aan de hand van natuurkundige systemen in de [snaartheorie](#).

Benieuwd hoe dat zit? Op onze favoriete buitenlandse collega-site, Quanta Magazine, verscheen in maart van dit jaar een populairwetenschappelijk artikel waarin onder meer de Amsterdamse natuurkundige Miranda Cheng aan het woord komt om de verrassende relatie tussen moonshine en snaartheorie uit te leggen. U kunt het artikel [hier](#) lezen.